

11 Zasada rozszerzania

Zasada rozszerzania pozwala na rozszerzenie dziedziny funkcji matematycznych z tradycyjnych zbiorów lub ich elementów do zbiorów rozmytych. Odwzorowanie podzbioru (lub jego elementu) dziedziny funkcji na podzbiór (jego element) przeciwdziedziny zostaje rozszerzone do odwzorowania przez funkcję zbioru rozmytego dziedziny na zbiór rozmyty przeciwdziedziny. Jeżeli funkcja odwzorowuje zbiór A na zbiór B , to B nazywamy obrazem A utworzonym za pomocą tej funkcji.

Założmy, że mamy przeliczalną przestrzeń $\mathbb{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ oraz zdefiniowany na niej zbiór rozmyty A :

$$A = \mu_A(x_1) / x_1 + \mu_A(x_2) / x_2 + \dots + \mu_A(x_p) / x_p.$$

Jeżeli mamy funkcję $y = g(x)$, która odwzorowuje przestrzeń $\mathbb{X}$ na $\mathbb{Y}$, to zasada rozszerzania pozwala na wyznaczenie odwzorowania zbioru rozmytego A przez tą funkcję na zbiór rozmyty B :

$$B = g(A) = \mu_A(x_1) / g(x_1) + \mu_A(x_2) / g(x_2) + \dots + \mu_A(x_p) / g(x_p).$$

Ponieważ w powyższej równości znak $+$ oznacza sumę logiczną, to w przypadku funkcji nie będących różnowartościowymi (nie będących iniekcjami) stosujemy operację sumy zbiorów, tj. s -normę (najczęściej operację $\max$). Przykładowo, jeżeli dla dwóch elementów x_i i x_j dziedziny mamy tą samą wartość funkcji $g(x_i) = g(x_j) = y$, to wartość funkcji przynależności zbioru B dla elementu y wyznaczamy jako: $\mu_A(x_i) \star_S \mu_A(x_j)$, gdzie $\star_S$ jest s -normą S .

Ogólnie możemy zapisać:

$$\mu_B(y) \triangleq \star_S \mu_A(x),$$
$$\{x|g(x)=y\}$$

gdzie $\star_S$ jest wieloargumentową s -normą S .

Dla zbioru $\{x | g(x) = y\}$ ograniczonego od góry zastępujemy operację maksimum operacją supremum:

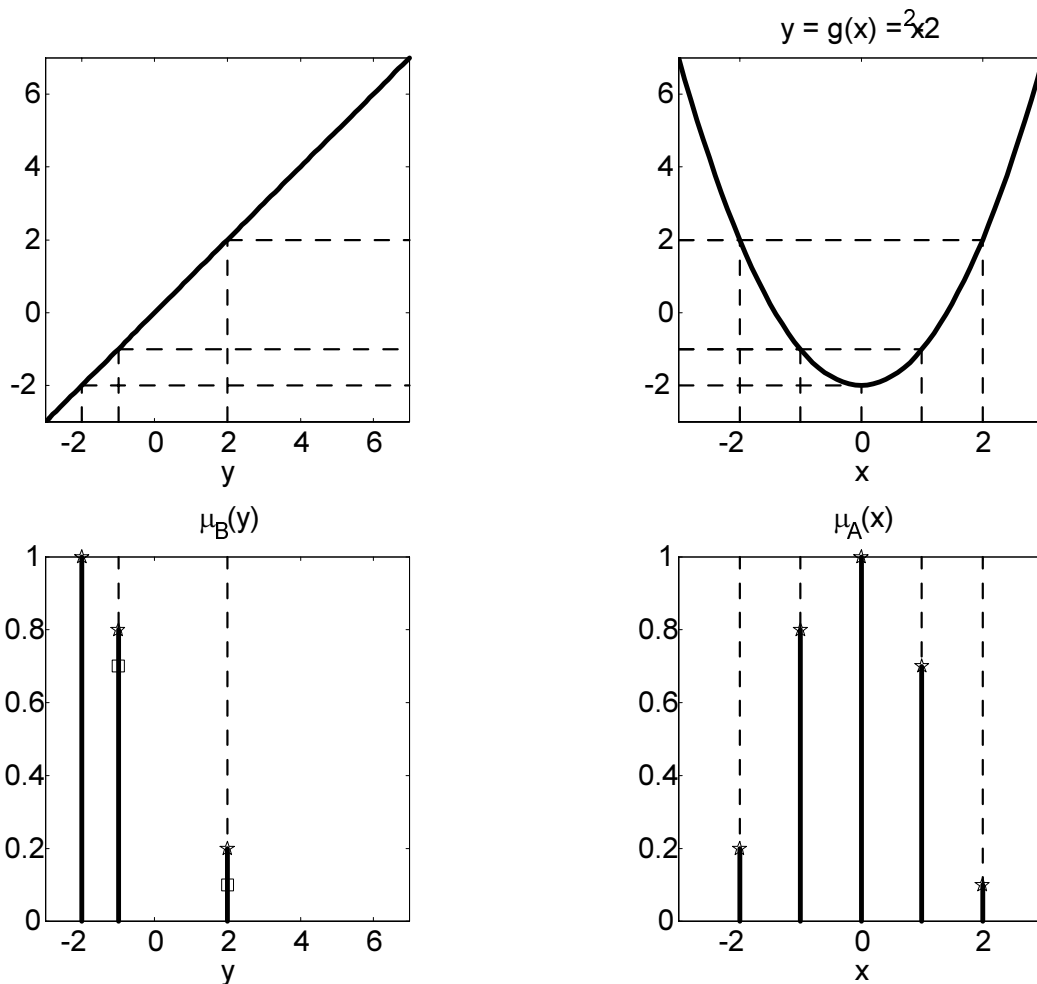
$$\mu_B(y) \triangleq \sup_{\{x|g(x)=y\}} \mu_A(x).$$

PRZYKŁAD: Zdefiniujmy na dyskretnej przestrzeni następujący zbiór rozmyty A :

$$A = 0.2/ - 2 + 0.8/ - 1 + 1/0 + 0.7/1 + 0.1/2,$$

oraz funkcję $y = g(x) \triangleq x^2 - 2$. Stosując zasadę rozszerzania z operacją maksimum jako s -normą otrzymujemy następujący zbiór rozmyty B :

$$B = 1/ - 2 + (0.7 \vee 0.8) / - 1 + (0.2 \vee 0.1) / 2$$
$$= 1/ - 2 + 0.8/ - 1 + 0.2/2.$$



23. Zastosowanie zasady rozszerzania.

Rozważmy bardziej ogólną sytuację gdy mamy funkcję wieloargumentową $y = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ o dziedzinie $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times \dots \times \mathbb{X}_n$ i przeciwdziedzinie $\mathbb{Y}$. Niech $A_1, A_2, \dots, A_n$ będą zbiorami rozmytymi zdefiniowanymi odpowiednio dla przestrzeni $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \dots, \mathbb{X}_n$. W tym przypadku argumenty funkcji $x_1, x_2, \dots, x_n$ muszą przyjmować określone wartości jednocześnie aby wyznaczyć

$y = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Sugeruje to powiązanie argumentów funkcji operacją „I”, którą modelujemy przy pomocy t -normy T oznaczanej $\star_T$. Wynikiem odwzorowania zbiorów $A_1, A_2, \dots, A_n$ przez funkcję g jest następująco definiowany zbiór rozmyty B określony na $\mathbb{Y}$:

$$\begin{cases} \sup_{\{(x_1, \dots, x_n) | g(x_1, \dots, x_n) = y\}} [\mu_{A_1}(x_1) \star_T \dots \star_T \mu_{A_n}(x_n)] & , \quad g^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0, & g^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases}$$

Oczywiście ogólnie możemy stosować dowolną s -normę S w miejsce operacji supremum.

Jeżeli przyjmiemy teraz szczególny przypadek, gdy zbiorem rozmytym A jest singleton o funkcji przynależności $\mu_A(x) = \delta_{x, x_0}$, to na podstawie definicji singletonu oraz

warunku brzegowego s -normy mamy:

$$\mu_B(y) = \star_S \left(\begin{array}{c} \delta_{x,x_0} \\ \{x|g(x)=y\} \end{array} \right) = \star_S \left(\begin{array}{c} \star_S \quad 1 \\ \{x=x_0|g(x)=y\} \end{array} \right)$$

$$\star_S \left(\begin{array}{c} \star_S \quad 0 \\ \{x \neq x_0|g(x)=y\} \end{array} \right) = \delta_{y,y_0},$$

gdzie $y_0 = g(x_0)$. Czyli w tym przypadku dochodzimy do klasycznego rozumienia funkcji, gdzie jest to odwzorowanie jednego elementu.

12 Liczby rozmyte

Liczbą rozmytą nazywamy wypukły i normalny zbiór rozmyty o ograniczonym nośniku definiowany na osi liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, oznaczany jako $\tilde{A}$. Liczby rozmyte doskonale nadają się do modelowania niepewności zawartej w stwierdzeniach języka naturalnego dotyczących liczb. Przykładowo mówimy „temperatura wynosi około 23°C ” lub „długość dywanu jest

między 3 a 3.5 m”.

Podstawowe operacje arytmetyczna na liczbach rozmytych możemy zdefiniować korzystając z zasady *rozszerzania*. W tym przypadku w miejsce argumentów operacji arytmetycznych wstawiamy zbiory rozmyte. Stąd dla liczb rozmytych $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ definiujemy dodawanie:

$$\mu_{\tilde{A} \oplus \tilde{B}}(z) \triangleq \sup_{\{(x,y)|x+y=z\}} \left[\mu_{\tilde{A}}(x) \star_T \mu_{\tilde{B}}(y) \right],$$

odejmowanie:

$$\mu_{\tilde{A} \ominus \tilde{B}}(z) \triangleq \sup_{\{(x,y)|x-y=z\}} \left[\mu_{\tilde{A}}(x) \star_T \mu_{\tilde{B}}(y) \right],$$

mnożenie:

$$\mu_{\tilde{A} \otimes \tilde{B}}(z) \triangleq \sup_{\{(x,y)|xy=z\}} \left[\mu_{\tilde{A}}(x) \star_T \mu_{\tilde{B}}(y) \right],$$

i dzielenie:

$$\mu_{\tilde{A} \oslash \tilde{B}}(z) \triangleq \sup_{\{(x,y)|x/y=z\}} \left[\mu_{\tilde{A}}(x) \star_T \mu_{\tilde{B}}(y) \right].$$

Powyżej zdefiniowane dodawanie liczb rozmytych jest przemienne i łączne oraz zachodzą równości: $\tilde{A} \oplus 0 = \tilde{A}$, $\tilde{A} \oplus (-\tilde{A}) = 0$, $\tilde{A} \oplus (-\tilde{B}) = \tilde{A} \ominus \tilde{B}$. Jednak rozdzielność $\tilde{A} \otimes (\tilde{B} \oplus \tilde{C}) = (\tilde{A} \otimes \tilde{B}) \oplus (\tilde{A} \otimes \tilde{C})$ zachodzi jedynie dla jednakowych znaków $\tilde{B}$ i $\tilde{C}$. Mnożenie jest łączne i przemienne, zachodzi $\tilde{A} \otimes 1 = \tilde{A}$, ale nie obowiązuje $\tilde{A} \otimes (\tilde{A})^{-1} = 1$.

Liczbę rzeczywistą b możemy traktować jako singleton o funkcji przynależności $\delta_{x,b}$. Wstawiając b w miejsce odpowiedniego argumentu operacji arytmetycznych uzyskujemy:

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{A} \oplus b}(z) &= \mu_{\tilde{A}}(z - b), \\ \mu_{\tilde{A} \ominus b}(z) &= \mu_{\tilde{A}}(z + b), \\ \mu_{b \otimes \tilde{A}}(z) &= \mu_{\tilde{A}}(z/b).\end{aligned}$$

Traktując 0 jako liczbę rozmytą i wstawiając do poprzednich zależności uzyskujemy:

$$\mu_{-\tilde{A}}(z) = \mu_{0 \ominus \tilde{A}}(z) = \mu_{\tilde{A}}(-z).$$

Z kolei traktując 1 jako liczbę rozmytą mamy:

$$\mu_{1/\tilde{B}}(z) = \mu_{\tilde{B}^{-1}} = \mu_{\tilde{B}}(1/z).$$

Dla operacji jednoargumentowych $f(x)$ zasada rozszerzania redukuje się do postaci:

$$\mu_{f(\tilde{A})}(z) \triangleq \sup_{\{x|f(x)=z\}} \mu_{\tilde{A}}(x),$$

przy pomocy której łatwo możemy doprowadzić do poprzednio uzyskanych zależności oraz wyprowadzić następne, np. z operacją wartości bezwzględnej i funkcji eksponencjalnej:

$$\mu_{|\tilde{A}|}(z) = \begin{cases} \max [\mu_{\tilde{A}}(z), \mu_{\tilde{A}}(-z)] , & z \geq 0, \\ 0, & z < 0, \end{cases}$$

$$\mu_{e^{\tilde{A}}}(z) = \mu_{\tilde{A}}(\ln x), \text{ dla } x > 0.$$

PRZYKŁAD: Obliczmy sumę, różnicę, iloczyn i iloraz arytmetyczny następujących liczb rozmytych:

$$\tilde{A} \triangleq 0.2/1 + 1/2 + 0.2/3,$$

$$\tilde{B} \triangleq 0.3/0 + 1/1 + 0.3/2.$$

Potrzebne obliczenia pomocnicze przedstawia Tablica.

1. Obliczenia dla liczb rozmytych.

x	y	$x + y$	$x - y$	xy	x/y	$\min \left[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y) \right]$
1	0	1	1	0	—	0.2
1	1	2	0	1	1	0.2
1	2	3	−1	2	$\frac{1}{2}$	0.2
2	0	2	2	0	—	0.3
2	1	3	1	2	2	1
2	2	4	0	4	1	0.3
3	0	3	3	0	—	0.2
3	1	4	2	3	3	0.2
3	2	5	1	6	$\frac{3}{2}$	0.2

Stosując operację minimum jako t -normą T , funkcje przynależności dla sumy arytmetycznej liczb rozmytych wyznaczamy jako supremum $\mu_{\tilde{A}}(x)$ i $\mu_{\tilde{B}}(y)$ po wszystkich parach (x, y) , których suma jest równa z :

$$\begin{aligned}\sup_{1=x+y} \{0.2\} &= 0.2, \\ \sup_{2=x+y} \{0.2, 0.3\} &= 0.3, \\ \sup_{3=x+y} \{0.2, 1, 0.2\} &= 1, \\ \sup_{4=x+y} \{0.3, 0.2\} &= 0.3, \\ \sup_{5=x+y} \{0.2\} &= 0.2.\end{aligned}$$

Stąd uzyskujemy ostateczną postać interesującej nas sumy:

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = 0.2/1 + 0.3/2 + 1/3 + 0.3/4 + 0.2/5.$$

Podobnie, korzystając z obliczeń pośrednich przedstawionych w Tablicy otrzemu-

jemy:

$$\tilde{A} \ominus \tilde{B} = 0.2/-1 + 0.3/0 + 1/1 + 0.3/2 + 0.2/3,$$

$$\tilde{A} \otimes \tilde{B} = 0.3/0 + 0.2/1 + 1/2 + 0.2/3 + \\ 0.3/4 + 0.2/6,$$

$$\tilde{A} \oslash \tilde{B} = 0.2/0.5 + 0.3/1 + 0.2/1.5 + 1/2 + 0.2/3.$$

Na podstawie definicji liczb rozmytych $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ widzimy, że reprezentują one liczby „około 2” i „około 1”, ponieważ dla tych wartości funkcja przynależności przyjmuje wartość jeden. Oceniając tą samą metodą widzimy, że $\tilde{A} \oplus \tilde{B}$, $\tilde{A} \ominus \tilde{B}$, $\tilde{A} \otimes \tilde{B}$ i $\tilde{A} \oslash \tilde{B}$ reprezentują odpowiednio następujące liczby rozmyte: „około 3”, „około 1”, „około 2” i „około 2”. Wyniki te są zgodne z klasyczną arytmetyką.

Inną metodą definiowania działań na liczbach rozmytych jest wykorzystanie ich α -przekrojów. Jeżeli mamy dwie liczby rozmyte $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$, to ich α -przekroje będą przedziałami: $\tilde{A}_\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+]$, $\tilde{B}_\alpha = [b_\alpha^-, b_\alpha^+]$.

Działania arytmetyczne na liczbach rozmytych definiujemy poprzez działania na ich α -przekrojach, $\alpha \in [0, 1]$:

$$\left(\tilde{A} \oplus \tilde{B}\right)_{\alpha} \triangleq \left[a_{\alpha}^{-} + b_{\alpha}^{-}, a_{\alpha}^{+} + b_{\alpha}^{+}\right],$$

$$\left(\tilde{A} \ominus \tilde{B}\right)_{\alpha} \triangleq \left[\min \left(a_{\alpha}^{-} - b_{\alpha}^{-}, a_{\alpha}^{+} - b_{\alpha}^{+}\right), \right. \\ \left. \max \left(a_{\alpha}^{-} - b_{\alpha}^{-}, a_{\alpha}^{+} - b_{\alpha}^{+}\right)\right],$$

$$\left(\tilde{A} \otimes \tilde{B}\right)_{\alpha} \triangleq \left[\min \left(a_{\alpha}^{-} b_{\alpha}^{-}, a_{\alpha}^{-} b_{\alpha}^{+}, a_{\alpha}^{+} b_{\alpha}^{-}, a_{\alpha}^{+} b_{\alpha}^{+}\right), \right. \\ \left. \max \left(a_{\alpha}^{-} b_{\alpha}^{-}, a_{\alpha}^{-} b_{\alpha}^{+}, a_{\alpha}^{+} b_{\alpha}^{-}, a_{\alpha}^{+} b_{\alpha}^{+}\right), \right.$$

oraz dla $0 \in [b_{\alpha}^{-}, b_{\alpha}^{+}]$:

$$\left(\tilde{A} \oslash \tilde{B}\right)_{\alpha} \triangleq \left[\min \left(a_{\alpha}^{-} / b_{\alpha}^{-}, a_{\alpha}^{-} / b_{\alpha}^{+}, a_{\alpha}^{+} / b_{\alpha}^{-}, a_{\alpha}^{+} / b_{\alpha}^{+}\right), \right. \\ \left. \max \left(a_{\alpha}^{-} / b_{\alpha}^{-}, a_{\alpha}^{-} / b_{\alpha}^{+}, a_{\alpha}^{+} / b_{\alpha}^{-}, a_{\alpha}^{+} / b_{\alpha}^{+}\right)\right].$$

Ponieważ na podstawie twierdzenia o dekompozycji, zbiór rozmyty jest całkowicie określony przez podania jego α -przekrojów, to powyższe zależności pozwalają jednoznacznie określić wynikową liczbę rozmytą.

PRZYKŁAD: Mamy dwie liczby rozmyte o trójkątnych funkcjach przynależności:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \triangleq \mu_A(x; 3, 4, 6), \quad \mu_{\tilde{B}}(x) \triangleq \mu_B(x; 1, 2, 3).$$

Dla dowolnego $\alpha \in [0, 1]$ ich α -przekroje są następujące:

$$\tilde{A}_\alpha = [3 + \alpha, 6 - 2\alpha], \quad \tilde{B}_\alpha = [1 + \alpha, 3 - \alpha].$$

Stąd mamy:

$$\left(\tilde{A} \oplus \tilde{B}\right)_\alpha \triangleq [4 + 2\alpha, 9 - 3\alpha],$$

$$\left(\tilde{A} \ominus \tilde{B}\right)_\alpha \triangleq [2, 3 - \alpha],$$

$$\left(\tilde{A} \otimes \tilde{B}\right)_\alpha \triangleq \left[3 + 4\alpha + \alpha^2, 18 - 12\alpha + 2\alpha^2\right],$$

$$\left(\tilde{A} \oslash \tilde{B}\right)_\alpha \triangleq \left[\frac{3 + \alpha}{3 - \alpha}, \frac{6 - 2\alpha}{1 + \alpha}\right],$$

Dla dodawania i odejmowania otrzymujemy liczby rozmyte o trójkątnych funkcjach przynależności:

$$\mu_{\tilde{A} \oplus \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A} \oplus \tilde{B}}(x; 4, 6, 9),$$

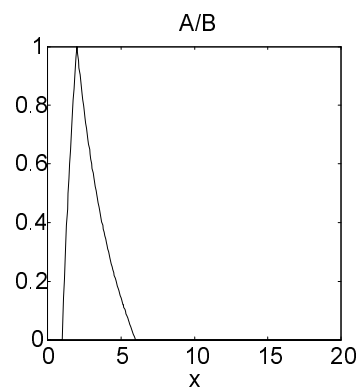
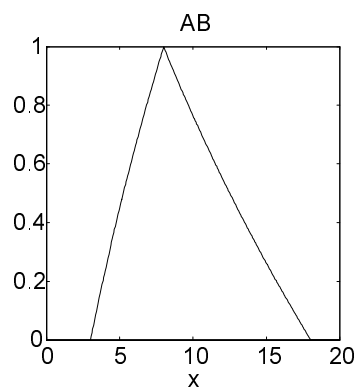
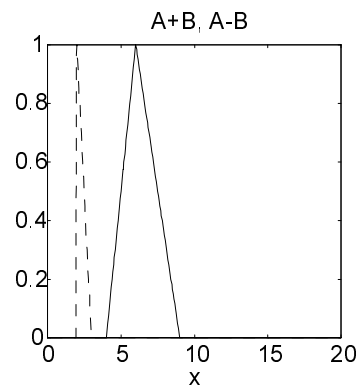
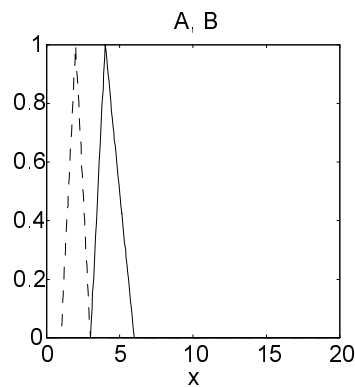
$$\mu_{\tilde{A} \ominus \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A} \ominus \tilde{B}}(x; 2, 2, 3),$$

a dla mnożenia i dzielenia, po rozwiązaniu

równań opisujących α -przekroje względem α otrzymujemy:

$$\mu_{\tilde{A} \otimes \tilde{B}}(x) = \begin{cases} 0, & x < 3, \\ -2 + \sqrt{1+x}, & 3 \leq x \leq 8, \\ 3 - \frac{1}{2}\sqrt{2x}, & 8 < x \leq 18, \\ 0, & x > 18. \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{A} \odot \tilde{B}}(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \frac{3x-3}{x+1}, & 1 \leq x \leq 2, \\ \frac{6-x}{2+x}, & 2 < x \leq 6, \\ 0, & x > 6. \end{cases}$$



24.Arytmetyka liczb rozmytych.

Osobnym problemem w arytmetyce rozmytej jest pojęcie równości dwóch liczb rozmytych. Istnieje wiele możliwych definicji, przytoczmy dwie:

- opartą na wzajemnej odległości porównywanych zbiorów oraz opartą na klasycznej teorii zbiorów. Najprostrzą metodą porównywania zbiorów rozmytych opisanych funkcjami przynależności $\mu_A(x)$ i $\mu_B(x)$ jest wyznaczenie ich odległości Minikowskiego:

$$d_p(A, B) \triangleq \left(\int |\mu_A(x) - \mu_B(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p > 1,$$

a wskaźnik równości zbiorów A i B definio-wany jest jako: $\text{Eq}_1(A, B) \triangleq 1 - d_p(A, B)$.

- Inne podejście do wyznaczania stopnia równości zbiorów rozmytych opiera się na klasycznej definicji z teorii zbiorów.

Wiemy, że równość zbiorów $A = B$ jest równoważna $A \subseteq B$ i $A \supseteq B$. Inkluzję zbiorów modelujemy przy pomocy implikacji rozmytej $I(x, y)$, która ma następującą własność: $I(x, y) = 1$ wtedy i tylko wtedy gdy $x \leq y$. Stąd funkcję przynależności zbioru rozmytego modelującego równość zbiorów A i B definiujemy jako:

$$\mu_{(A=B)}(x) \triangleq I[\mu_A(x), \mu_B(x)] \star_T I[\mu_B(x), \mu_A(x)],$$

gdzie $\star_T$ jest t -normą T modelującą łącznik „i”. Aby równość zbiorów zbiorów oceniać przy pomocy jednej liczby definiujemy optymistyczny:

$$\text{Eq}_2^{\text{opt}}(A, B) \triangleq \sup_{x \in \mathbb{X}} \mu_{(A=B)}(x),$$

$$\text{pesymistyczny: } \text{Eq}_2^{\text{pes}}(A, B) \triangleq \inf_{x \in \mathbb{X}} \mu_{(A=B)}(x) \text{ oraz}$$

$$\text{średni: } \text{Eq}_2^{\text{av}}(A, B) \triangleq 1 - d_p((A = B), \mathbb{X})$$

wskaźnik równości zbiorów.

Zajmijmy się problemem porównywania liczb rozmytych. Problem polega na wyborze z $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ liczby większej. Dla przypadku gdy nośniki obu zbiorów są rozłączne jest to problem trywialny. Jednak gdy nośniki tych zbiorów mają część wspólną, to trudno podać jednoznaczną metodę wybrania liczby większej. Przykładowo porównując rdzenie tych liczb większe wartości może przyjmować liczba $\tilde{A}$, podczas gdy nośnik liczby $\tilde{B}$ przyjmuje większe wartości. Podobnie jak w przypadku pojęcia równości liczb rozmytych z wielu możliwych rozwiązań podajmy dwa:

- oparte na pomiarze odległości oraz porównywaniu α -przekrojów. Pierwsze podejście polega na wyznaczeniu liczby rozmytej $\tilde{C}$ takiej że: $\tilde{A} \leq \tilde{C}$ i $\tilde{B} \leq \tilde{C}$, a następnie przyjęciu, że większa jest liczba której odległość Minikowskiego

do $\tilde{C}$ jest mniejsza. Jako liczbę rozmytą $\tilde{C}$ wybieramy zazwyczaj $\tilde{C} = \max(\tilde{A}, \tilde{B})$ definiowaną przy pomocy zasady rozszerzania:

$$\mu_{\max(\tilde{A}, \tilde{B})}(z) \triangleq \sup_{\{(x,y) | \max(x,y)=z\}} [\mu_{\tilde{A}}(x) \star_T \mu_{\tilde{B}}(y)]$$

Ostatecznie mówimy, że $\tilde{A} \leq \tilde{B}$ jeżeli $d_p(\tilde{A}, \tilde{C}) \geq d_p(\tilde{B}, \tilde{C})$.

- Druga metoda polega na porównywaniu liczb rozmytych na podstawie ich α -przekrojów: $\tilde{A}_\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+]$, $\tilde{B}_\alpha = [b_\alpha^-, b_\alpha^+]$. W tym przypadku mówimy, że $\tilde{A} \leq \tilde{B}$ jeżeli $a_\alpha^+ \leq b_\alpha^+$ dla wszystkich $\alpha \in (\alpha', 1]$, gdzie α' jest parametrem.

13 Relacje rozmyte

Ważnym uogólnieniem pojęcia zbioru rozmytego jest pojęcie *relacji rozmytej*. Relacją rozmytą R pomiędzy przestrzeniami $\mathbb{X}$ i $\mathbb{Y}$ nazywamy rozmyty podzbiór iloczynu kartezjańskiego $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, tj.:

$$R \in F(\mathbb{X} \times \mathbb{Y}),$$

lub

$$R : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \rightarrow [0, 1],$$

gdzie $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ jest iloczynem kartezjańskim przestrzeni:

$$\mathbb{X} \times \mathbb{Y} \triangleq \{ (x, y) \mid x \in \mathbb{X} \text{ i } y \in \mathbb{Y} \}.$$

Inaczej relację rozmytą możemy przedstawić jako zbiór uporządkowanych par:

$$R = \{ (x, y), \mu_R(x, y) \mid x \in \mathbb{X}, y \in \mathbb{Y}, \mu_R(x, y) \in [0, 1] \}.$$

W notacji Zadeha mamy:

$$R = \int_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} \mu_R(x, y) / (x, y).$$

Widzimy, że relacja rozmyta przyporządkowuje każdej parze elementów (x, y) określony stopień przynależności $\mu_R(x, y)$, który interpretowany może być jako stopień powiązania tych elementów.

Do podstawowych relacji rozmytych należą *produkt (iloczyn) kartezjański* dowolnych zbiorów rozmytych A i B , definiowany następująco:

$$\mu_{A \times B}(x, y) \triangleq \mu_A(x) \star_T \mu_B(y),$$

oraz *koprodukt kartezjański*:

$$\mu_{A \overline{\times} B}(x, y) \triangleq \mu_A(x) \star_S \mu_B(y).$$

PRZYKŁAD: Jako przykład relacji rozmytej zdefiniowanej na ciągłej przestrzeni podajmy relację „ x jest podobne do y ”, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. W tym przypadku funkcja przynależności może mieć postać:

$$\mu_R(x, y) = f(|x - y|),$$

gdzie funkcja f spełnia następujące własności: $f(0) = 1$ i jest nierosnącą funkcją na

$[0, +\infty)$. Przykładowo mogą to być funkcje $\exp(-|x-y|)$, $1/(1+|x-y|^6)$.

Łatwo uzyskać relację „ x jest niepodobne do y ” jako: $\mu_R(x, y) = 1 - f(|x - y|)$ oraz „ x jest dużo większe od y ” jako: $\mu_R(x, y) = 1 - f[\max(0, x - y)]$.

PRZYKŁAD: Zakładamy, że nasze przestrzenie są teraz dyskretne: $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{2, 3, 4, 5\}$. Interesuje nas relacja „ x jest nieco mniejsze niż y ”. Stosując notację Zadeha przykładowo mamy:

$$\begin{aligned} R = & 1/(1, 2) + 0.9/(1, 3) + 0.7/(1, 4) \\ & + 0.3/(1, 5) + 0/(2, 2) + 1/(2, 3) + \\ & 0.8/(2, 4) + 0.4/(2, 5) + 0/(3, 2) \\ & + 0/(3, 3) + 1/(3, 4) + 0.6/(3, 5). \end{aligned}$$

Inaczej powyższą relację możemy zapisać w postaci macierzy relacyjnej:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.7 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0.8 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1 & 0.6 \end{bmatrix},$$

gdzie element o indeksach i, j jest wartością relacji dla i -tego elementu $\mathbb{X}$ i j -tego elementu $\mathbb{Y}$.

PRZYKŁAD: Jako przykład przestrzeni dyskretnej nieuporządkowanej bierzemy pod uwagę: $\mathbb{X} = \{\text{morela, nektaryna}\}$ oraz $\mathbb{Y} = \{\text{jabłko, brzoskwinia, gruszka}\}$. Relację rozmytą „ x podobne do y ” możemy przykładowo zapisać jako:

$$R = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.9 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

Łatwo możemy podać uogólnienie pojęcia relacji rozmytej dla n wymiarów:

$$R = \{[(x_1, x_2, \dots, x_n), \mu_R(x_1, x_2, \dots, x_n)] | \\ x_1 \in \mathbb{X}_1, x_2 \in \mathbb{X}_2, \dots, x_n \in \mathbb{X}_n\},$$

gdzie $\mu_R : \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times \dots \times \mathbb{X}_n \rightarrow [0, 1]$ jest funkcją przynależności relacji rozmytej R .

Stosując notację zbiorów rozmytych zaproponowaną przez Zadeha możemy napisać:

$$R = \int_{\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times \dots \times \mathbb{X}_n} \mu_R(x_1, x_2, \dots, x_n) / (x_1, x_2, \dots, x_n) .$$

Niech R_1 i R_2 oznaczają relacje rozmyte zdefiniowane na przestrzeniach odpowiednio: $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}, \mathbb{Y} \times \mathbb{Z}$. Najczęściej stosowanymi *złożeniami* (superpozycjami) relacji rozmytych są:

- złożenie supremum- T -norma (sup- T), które prowadzi do relacji rozmytej $R_1 \circ R_2$ zdefiniowanej na przestrzeni $\mathbb{X} \times \mathbb{Z}$:

$$R_1 \circ R_2 = \left\{ \left((x, z), \sup_{y \in \mathbb{Y}} [\mu_{R_1}(x, y) \star_T \mu_{R_2}(y, z)] \right) \mid x \in \mathbb{X}, y \in \mathbb{Y}, z \in \mathbb{Z} \right\},$$

lub bezpośrednio:

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x, z) = \sup_{y \in \mathbb{Y}} [\mu_{R_1}(x, y) \star_T \mu_{R_2}(y, z)] .$$

- złożenie infimum- S -norma ($\text{inf-}S$), które prowadzi do relacji rozmytej $R_1 \bullet R_2$ zdefiniowanej na przestrzeni $\mathbb{X} \times \mathbb{Z}$:

$$R_1 \bullet R_2 = \left\{ \left((x, z), \inf_{y \in \mathbb{Y}} [\mu_{R_1}(x, y) \star_S \mu_{R_2}(y, z)] \right) \mid x \in \mathbb{X}, y \in \mathbb{Y}, z \in \mathbb{Z} \right\},$$

lub bezpośrednio:

$$\mu_{R_1 \bullet R_2}(x, z) = \inf_{y \in \mathbb{Y}} [\mu_{R_1}(x, y) \star_S \mu_{R_2}(y, z)].$$

PRZYKŁAD: Jeżeli mamy następujące relacje rozmyte:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.7 \\ 0.1 & 0.3 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 1 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix},$$

to stosując złożenie max-min element o indeksie $(1, 1)$ obliczamy jako:

$\max [0.2 \wedge 0.3, 0.5 \wedge 0.4, 0.7 \wedge 0.8] = 0.7$. Pełny wynik złożenia max-min oraz min-max jest

następujący:

$$R_1 \circ R_2 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix}, \quad R_1 \bullet R_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

Szczególnym przypadkiem relacji rozmytej jest tradycyjna związana z funkcją $y = g(x)$:

$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{dla } g(x) = y, \\ 0, & \text{dla pozostałych.} \end{cases}$$

Relacja taka ma ścisły związek z wykresem funkcji G_g , będącym zbiorem uporządkowanych par:

$$G_g = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{X}, y = f(x) \in \mathbb{Y}\},$$

gdzie $\mathbb{X}$ jest dziedziną, a $\mathbb{Y}$ przeciwdziedziną funkcji $g(x)$.

Wyznamy złożenie sup-min powyższej relacji ze zbiorem rozmytym $\mu_A(x)$:

$$\begin{aligned} \mu_{A \circ R}(y) &= \sup_{x \in \mathbb{X}} [\mu_A(x) \wedge \mu_R(x, y)] \\ &= \sup_{\{x \in X \mid g(x)=y\}} [\mu_A(x) \wedge 1] \bigvee \\ &\quad \sup_{\{x \in X \mid g(x) \neq y\}} [\mu_A(x) \wedge 0] = \sup_{\{x \in X \mid g(x)=y\}} \mu_A(x). \end{aligned}$$

Jeżeli oprócz relacji rozmytych R_1 i R_2 zdefiniujemy dodatkowo relację rozmytą R_3 określoną na przestrzeni $\mathbb{Z} \times \mathbb{U}$ to dla złożenia sup-min można udowodnić własność łączności :

$$R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = (R_1 \circ R_2) \circ R_3,$$

monotoniczności:

$$\text{Jeżeli } R_1 \subseteq R'_1 \text{ to } R_1 \circ R_2 \subseteq R'_1 \circ R_2,$$

rozdzielności względem sumy:

$$R_1 \circ (R_2 \cup R_3) = (R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3),$$

oraz słabej rozdzielności względem przekroju:

$$R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3).$$

Przedstawione złożenia relacji mogą być uogólnione na złożenia S - T i T - S , definiowane następująco:

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x, z) = \bigstar_{y \in \mathbb{Y}}^S [\mu_{R_1}(x, y) \star_T \mu_{R_2}(y, z)],$$

$$\mu_{R_1 \bullet R_2}(x, z) = \bigstar_{y \in \mathbb{Y}}^T [\mu_{R_1}(x, y) \star_S \mu_{R_2}(y, z)].$$

Dwuwymiarowa relacja rozmyta $R : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow [0, 1]$ jest:

- *ε -zwrotna*, jeżeli $\mu_R(a, a) \geq \varepsilon$, dla każdego $a \in \mathbb{X}$. Dla $\varepsilon = 1$ otrzymujemy tradycyjną definicję zwrotności.
- *słabo zwrotna*, jeżeli $\mu_R(a, a) \geq \mu_R(a, b)$, dla każdego $a, b \in \mathbb{X}$,
- *niezwrotna*, jeżeli $\mu_R(a, a) = 0$, dla każdego $a \in \mathbb{X}$,
- *symetryczna*, jeżeli $\mu_R(a, b) = \mu_R(b, a)$, dla każdego $a, b \in \mathbb{X}$,
- *T -antysymetryczna*,
jeżeli $T[\mu_R(a, b), \mu_R(b, a)] = 0$, dla każdego $a \neq b; a, b \in \mathbb{X}$, gdzie T jest t -normą; stosując t -normę Łukasiewicza otrzymujemy warunek: $\mu_R(a, b) + \mu_R(b, a) \leq 1$.
- *T -asymetryczna*,
jeżeli $T[\mu_R(a, b), \mu_R(b, a)] = 0$, dla każdego $a, b \in \mathbb{X}$,

- *S-kompletna*,
jeżeli $S[\mu_R(a, b), \mu_R(b, a)] = 1$, dla każdego $a \neq b; a, b \in \mathbb{X}$, gdzie S jest s -normą; stosując s -normę Łukasiewicza otrzymujemy warunek: $\mu_R(a, b) + \mu_R(b, a) \geq 1$.
- *silnie S-kompletna*, jeżeli $\mu_R(a, b) + \mu_R(b, a) \geq 1$, dla każdego $a, b \in \mathbb{X}$,
- *T-przechodnia*, jeżeli $T[\mu_R(a, c), \mu_R(c, b)] \leq \mu_R(a, b)$, dla każdego $a, b, c \in \mathbb{X}$. Dla t -normy Łukasiewicza mamy: $\mu_R(a, c) \geq \mu_R(a, b) + \mu_R(b, c) - 1$.
- *ujemnie S-przechodnia*,
jeżeli $\mu_R(a, b) \leq S[\mu_R(a, c) \mu_R(c, b)]$, dla każdego $a, b, c \in \mathbb{X}$. Dla s -normy Łukasiewicza mamy: $\mu_R(a, c) \leq \mu_R(a, b) + \mu_R(b, c)$,
- *T-S-ferrensowska*, jeżeli
 $T[\mu_R(a, b), \mu_R(c, d)] \leq S[\mu_R(a, d), \mu_R(c, b)]$,
dla każdego $a, b, c, d \in \mathbb{X}$. Dla t - i s -normy Łukasiewicza mamy: $\mu_R(a, d) + \mu_R(c, b) \geq \mu_R(a, b) + \mu_R(c, d) - 1$.

- *T-S-półprzechodnia*, jeżeli
 $T[\mu_R(a, d), \mu_R(d, b)] \leq S[\mu_R(a, c), \mu_R(c, b)]$,
dla każdego $a, b, c, d \in \mathbb{X}$. Dla *t*- i *s*-
normy Łukasiewicza mamy: $\mu_R(a, d) + \mu_R(d, c) \geq \mu_R(a, b) + \mu_R(b, c) - 1$.
- *lewostronnie liniowa* jeżeli dla każdego
 $a, b, c, d \in \mathbb{X}$ z warunku $\mu_R(c, a) < \mu_R(c, b)$
wynika $\mu_R(d, a) \leq \mu_R(d, b)$.
- *prawostronnie liniowa* jeżeli dla każdego
 $a, b, c, d \in \mathbb{X}$ z warunku $\mu_R(c, a) > \mu_R(c, b)$
wynika $\mu_R(d, a) \geq \mu_R(d, b)$.
- *liniowa* jeżeli jest prawo- i lewostronnie
liniowa.

Definiujemy dopełnienie relacji: $\mu_{\overline{R}}(x, y) \triangleq n[\mu_R(x, y)]$, relację odwrotną: $\mu_{R^{-1}}(x, y) \triangleq \mu_R(y, x)$ oraz dualną: $\mu_{R^d}(x, y) \triangleq n[\mu_R(y, x)]$. Zadeh w 1971 r. wprowadził rozmyte relacje równoważności i porządku. Uogólnioną na przypadek rozmyty relację równoważności nazwano *relacją podobieństwa*.

Podobnie jak każda relacja równoważności określa podział przestrzeni $\mathbb{X}$ na klasy równoważności, to relacja podobieństwa określa klasy podobieństwa. Jeżeli mamy pewną relację podobieństwa R , to z każdym elementem $x_i \in \mathbb{X}$ związana jest pewna klasa podobieństwa oznaczana $R[x_i]$ lub prosto $[x_i]$. Klasa ta jest zbiorem rozmytym na przestrzeni $\mathbb{X}$ o następującej funkcji przynależności: $\mu_{R[x_i]}(x_j) = \mu_R(x_i, x_j)$.

Relacja rozmyta R jest nazywana:

- *równoważności (podobieństwa)* jeżeli zwrotna, symetryczna i przechodnia,
- *turniejowa* jeżeli jest asymetryczna i kompletna,
- *częściowego wstępnego porządku* jeżeli jest zwrotna i przechodnia,
- *częściowego porządku* jeżeli jest antysymetryczna i przechodnia,

- *ściśłego częściowego porządku* jeżeli jest asymetryczna i przechodnia,
- *całkowitego wstępnego porządku* jeżeli silnie kompletna i przechodnia,
- *całkowitego porządku (liniowego porządku)* jeżeli jest antysymetryczna, kompletna i przechodnia,
- *ściśłego całkowitego porządku* jeżeli jest asymetryczna, kompletna i przechodnia,
- *słabego porządku* jeżeli jest asymetryczna i ujemnie przechodnia,
- *przedziałowego porządku* jeżeli jest kompletna i ferrensowska,
- *półporządku* jeżeli jest kompletna, ferrensowska i półprzechodnia.

PRZYKŁAD: Przykładową relację podobieństwa S przedstawiono poniżej:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 1 & 0.6 \\ 0.3 & 1 & 0.3 & 0.3 \\ 1 & 0.3 & 1 & 0.6 \\ 0.6 & 0.3 & 0.6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Relacja ta określa następujące klasy podobieństwa: $S[x_1] = 1/x_1 + 0.3/x_2 + 1/x_3 + 0.6/x_4$, $S[x_2] = 0.3/x_1 + 1/x_2 + 0.3/x_3 + 0.3/x_4$, $S[x_3] = 1/x_1 + 0.3/x_2 + 1/x_3 + 0.6/x_4$, $S[x_4] = 0.6/x_1 + 0.3/x_2 + 0.6/x_3 + 1/x_4$.

14 Cylindryczne rozszerzenie i projekcja

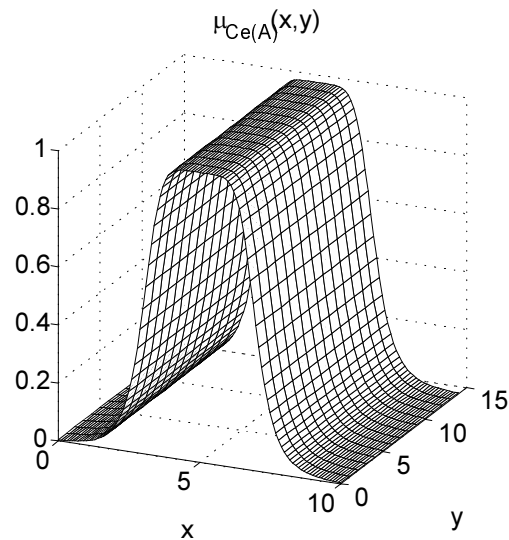
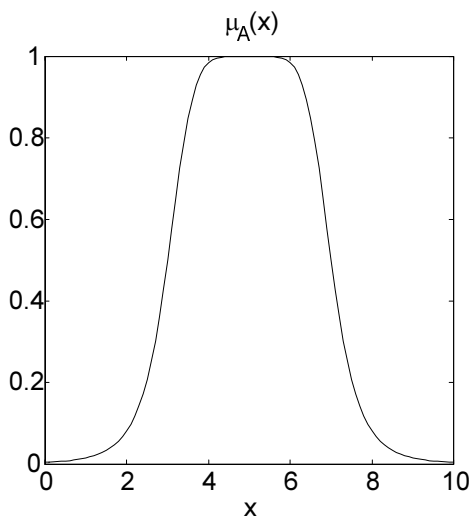
Cylindryczne rozszerzenie zbioru lub relacji rozmytej pozwala uzyskać zbiór lub relację rozmytą o większej wymiarowości. Jeżeli przez A oznaczymy zbiór rozmyty zdefiniowany na przestrzeni $\mathbb{X}$, to jego cylindryczne rozszerzenie na przestrzeń $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ jest relacją rozmytą oznaczaną $Ce(A)$ i zdefiniowaną jako:

$$\forall_{x \in \mathbb{X}, y \in \mathbb{Y}} \quad \mu_{Ce(A)}(x, y) = \mu_A(x),$$

lub stosując zapis Zadeha:

$$Ce(A) = \int_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} \mu_A(x) / (x, y).$$

Pojęcie cylindrycznego rozszerzania łatwo uogólnić na przypadek wielowymiarowy. Niech dana będzie n -wymiarowa przestrzeń $\underline{\mathbb{X}} = \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times \dots \times \mathbb{X}_n$, której elementami są $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.



25. Cylindryczne rozszerzenie zbioru rozmytego.

Oznaczmy przez $(m) \triangleq (i_1, i_2, \dots, i_m)$ podciąg indeksów $(1, 2, \dots, n)$ a przez $\underline{x}_{(m)} = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m})$, będących elementami przestrzeni $\underline{\mathbb{X}}_{(m)} = \mathbb{X}_{i_1} \times \mathbb{X}_{i_2} \times \dots \times \mathbb{X}_{i_m}$. Zwróćmy uwagę, że $\mathbb{X} = \underline{\mathbb{X}}_{(m)} \times \underline{\mathbb{X}}_{(\tilde{m})}$, gdzie $(\tilde{m})$ jest zbiorem indeksów komplementarnym do (m) . Jeżeli mamy teraz relację rozmytą R zdefiniowaną na przestrzeni $\underline{\mathbb{X}}_{(m)}$, to jej cylindryczne rozszerzenie na przestrzeń $\underline{\mathbb{X}}$ oznaczane $\text{Ce}(R)$ dane jest przez:

$$\forall_{\underline{x} \in \underline{\mathbb{X}}} \quad \mu_{\text{Ce}(R)}(\underline{x}) = \mu_R(\underline{x}_{(m)}),$$

lub w notacji Zadeha:

$$\text{Ce}(R) = \int_{\underline{\mathbb{X}}} \mu_R(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}) / (x_1, \dots, x_n) .$$

Czyli cylindryczne rozszerzenie jest metodą uzyskania n wymiarowej relacji rozmytej na podstawie relacji m wymiarowej, gdzie $m < n$.

PRZYKŁAD: Dokonajmy cylindrycznego rozszerzenia zbioru rozmytego z poprzedniego Przykładu. Niech przestrzeń $\mathbb{Y} = \{1, 2\}$ wówczas mamy:

$$\begin{aligned} B = & 0.1 / (1, 1) + 1 / (2, 1) + 0.9 / (3, 1) \\ & + 0.8 / (4, 1) + 0.5 / (5, 1) + 0.2 / (6, 1) + \\ & 0.1 / (1, 2) + 1 / (2, 2) + 0.9 / (3, 2) \\ & + 0.8 / (4, 2) + 0.5 / (5, 2) + 0.2 / (6, 2) . \end{aligned}$$

W pewnym sensie operacją przeciwną do cylindrycznego rozszerzenia jest *projekcja* relacji rozmytej.

Jeżeli oznaczymy n wymiarową relację rozmytą na przestrzeni $\underline{X}$ przez R , to jej projekcję na przestrzeń $\underline{X}_{(m)}$ definiujemy jako:

$$\forall \underline{x}_{(m)} \in \underline{X}_{(m)} \quad \mu_{\text{Proj}_{\underline{X}_{(m)}}}(R) \left(\underline{x}_{(m)} \right) = \sup_{\underline{x}_{(\tilde{m})} \in \underline{X}_{(\tilde{m})}} \mu_R(\underline{x}) ,$$

lub w notacji Zadeha:

$$\begin{aligned} \text{Proj}_{\underline{X}_{(m)}}(R) &= \\ &= \int_{\underline{X}_{(m)}} \sup_{\underline{x}_{(\tilde{m})} \in \underline{X}_{(\tilde{m})}} \mu_R(x_1, \dots, x_n) / (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}) . \end{aligned}$$

Czyli projekcja jest metodą uzyskania m wymiarowej relacji rozmytej na podstawie relacji n wymiarowej, gdzie $m < n$. Projekcja relacji rozmytej może być także rozumiana jako szczególny przypadek złożenia

sup- t -norma T:

$$\begin{aligned} \mu_{\text{Proj}_{\underline{\mathbb{X}}(m)}(R)}(\underline{x}_{(m)}) &= \\ &= \sup_{\underline{x}_{(\tilde{m})} \in \underline{\mathbb{X}}(\tilde{m})} \left[\mu_{\underline{\mathbb{X}}(\tilde{m})}(\underline{x}_{(\tilde{m})}) \star_T \mu_R(\underline{x}_{(\tilde{m})}, \underline{x}_{(m)}) \right], \end{aligned}$$

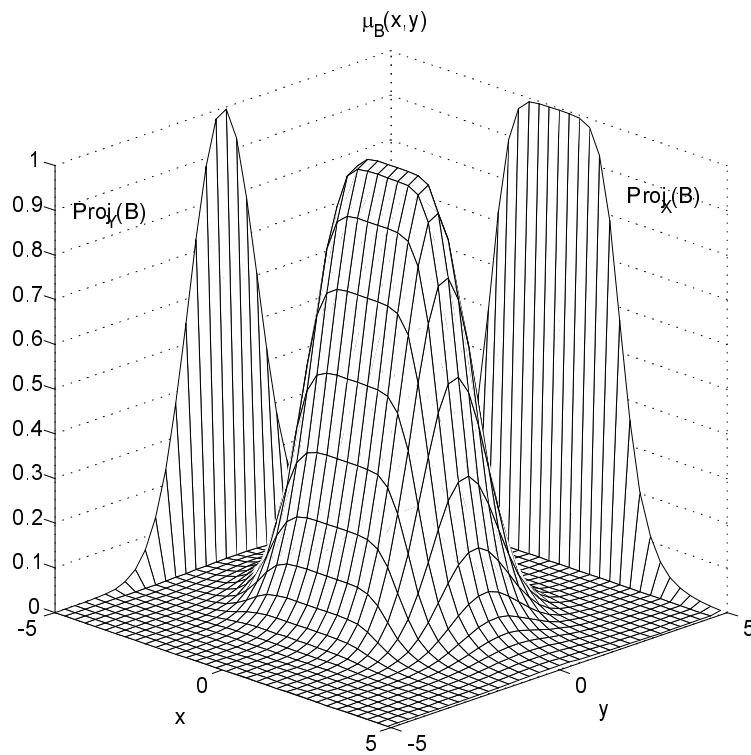
gdzie $\mu_{\underline{\mathbb{X}}(\tilde{m})}(\underline{x}_{(\tilde{m})})$ jest specjalnym zbiorem rozmytym posiadającym funkcję przynależności równą 1 dla całej przestrzeni $\underline{\mathbb{X}}(\tilde{m})$.

W dwuwymiarowym przypadku mamy zbiór B zdefiniowany na przestrzeni $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ i jego projekcję na przestrzeń $\mathbb{X}$:

$$\text{Proj}_{\mathbb{X}}(B) = \int_{\mathbb{X}} \sup_{y \in \mathbb{Y}} \mu_B(x, y) / x,$$

i projekcję na przestrzeń $\mathbb{Y}$:

$$\text{Proj}_{\mathbb{Y}}(B) = \int_{\mathbb{Y}} \sup_{x \in \mathbb{X}} \mu_B(x, y) / y.$$



26. Projekcja zbioru rozmytego.

Dokonajmy projekcji relacji rozmytej R określonej na przestrzeni $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ z poprzedniego Przykładu:

$$\text{Proj}_{\mathbb{X}}(R) = (0.4 \vee 0.8 \vee 0.2) / \text{morela}$$

$$+ (0.6 \vee 0.9 \vee 0.1) / \text{nektaryna},$$

$$\text{Proj}_{\mathbb{Y}}(R) = (0.4 \vee 0.6) / \text{jabłko}$$

$$+ (0.8 \vee 0.9) / \text{brzoskwinia}$$

$$+ (0.2 \vee 0.1) / \text{gruszka}.$$