

8 Podział norm trójkątnych

O t -normie T mówimy, że jest:

- *ciągła* jeżeli funkcja T jest ciągła na $[0, 1] \times [0, 1]$,
- *ściśła* jeżeli funkcja T jest ściśle monotoniczna,
- *archimedesowska* jeżeli $T(x, x) < x$ dla każdego $x \in (0, 1)$.

Podobnie o s -normie S mówimy, że jest:

- *ciągła* jeżeli funkcja S jest ciągła na $[0, 1] \times [0, 1]$,
- *ściśła* jeżeli funkcja S jest ściśle monotoniczna,
- *archimedesowska* jeżeli $S(x, x) > x$ dla każdego $x \in (0, 1)$.

t -norma M jest ciągła ale nie jest archimedesowska, natomiast Π i W są ciągłe i archimedesowskie.

t -norma, Z nie jest ciągła i jest archimedesowska.

s -norma M' jest ciągła ale nie jest archimedesowska, natomiast Π' i W' są ciągłe i archimedesowskie.

s -norma, Z' nie jest ciągła i jest archimedesowska.

Element $x \in (0, 1]$ nazywany jest *zerowym dzielnikiem* t -normy T jeżeli istnieje element $y \in (0, 1]$ taki, że $T(x, y) = 0$. Dla t -normy M zbiór zerowych dzielników jest zbiorem pustym, a dla Z jest odcinkiem $[0, 1)$.

Mówimy, że t -norma T spełnia *prawo wyrównywania* jeżeli $T(x, y) = T(x, z)$ i $x \in (0, 1]$ implikuje $y = z$. Zauważmy, że t -norma Π spełnia a M nie spełnia prawa wyrównywania.

Dla dowolnej t -normy T i s -normy S obowiązują następujące nierówności:

$$\forall_{x \in [0,1]} \forall_{y \in [0,1]} \begin{cases} Z(x, y) \leq T(x, y) \leq M(x, y), \\ M'(x, y) \leq S(x, y) \leq Z'(x, y). \end{cases}$$

Dodatkowo zachodzi $W \leq \Pi$, $W \leq \min_0$, $\Pi' \leq W'$ i $\max_1 \leq W'$.

Niech $\star_1, \star_2 : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ będą mierzalnymi dwuargumentowymi operacjami na $[0, 1]$. Pseudometryczna odległość pomiędzy operacją $\star_1$ i $\star_2$ jest obliczana następująco:

$$d(\star_1, \star_2) \triangleq \int_0^1 \int_0^1 |x \star_1 y - x \star_2 y| dx dy.$$

Dla operacji $x \star_1 y = 0$ i $x \star_2 y = 1$ dla wszystkich $x, y \in [0, 1]$ otrzymujemy $d(\star_1, \star_2) = 1$.

$d(Z, Z') = 1$, gdzie Z i Z' oznaczają produkt i sumę drastyczną.

Operacje $[0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ możemy podzielić na trzy klasy:

- produkty ($Z \leq T \leq M$),
- średnie ($M \leq \star_A \leq M'$),
- sumy ($M' \leq S \leq Z'$).

W klasie operacji uśredniania występują znane operatory dla $x, y \in [0, 1]$, tj.:

- średnia arytmetyczna: $x \star_a y = (x + y) / 2$,
- średnia geometryczna: $x \star_g y = \sqrt{xy}$,
- średnia harmoniczna: $x \star_h y = (2xy) / (x + y)$.

9 Operacje parametryczne

- funkcje *Franka*:

$$T_s(x, y) = \log_s \left[1 + \frac{(s^x - 1)(s^y - 1)}{s - 1} \right],$$

$$S_s(x, y) = 1 - \log_s \left[1 + \frac{(s^{1-x} - 1)(s^{1-y} - 1)}{s - 1} \right],$$

gdzie parametr $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$, $s \neq 1$.

Jako szczególne przypadki norm Franka otrzymujemy:

$$T_0(x, y) = \lim_{s \rightarrow 0} T_s(x, y) = \min(x, y) = M(x, y),$$

$$T_1(x, y) = \lim_{s \rightarrow 1} T_s(x, y) = xy = \Pi(x, y),$$

$$\begin{aligned} T_\infty(x, y) &= \lim_{s \rightarrow \infty} T_s(x, y) = \max(x + y - 1, 0) \\ &= W(x, y), \end{aligned}$$

oraz podobnie dla s -norm:

$$S_0(x, y) = \lim_{s \rightarrow 0} S_s(x, y) = \max(x, y) = M'(x, y),$$

$$S_1(x, y) = \lim_{s \rightarrow 1} S_s(x, y) = x + y - xy = \Pi'(x, y),$$

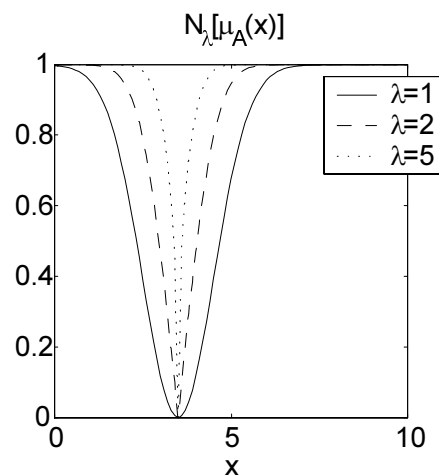
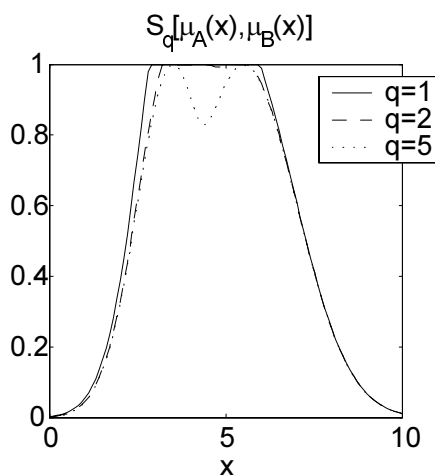
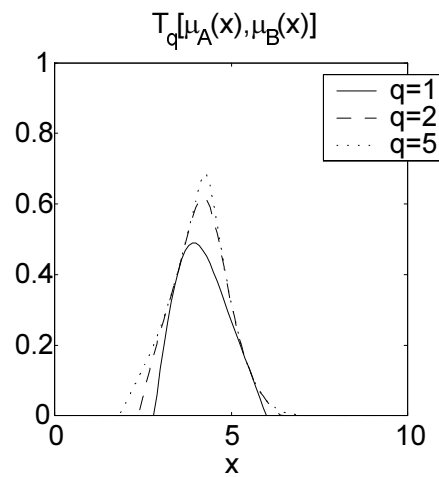
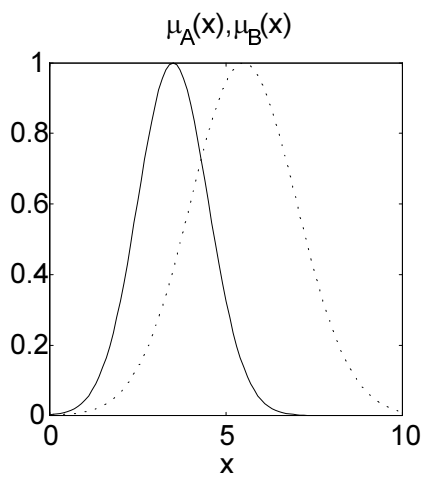
$$S_\infty(x, y) = \lim_{s \rightarrow \infty} S_s(x, y) = \min(x + y, 1) = W'(x, y)$$

• funkcje *Yagera*:

$$T_q(x, y) = 1 - \min \left\{ 1, [(1 - x)^q + (1 - y)^q]^{\frac{1}{q}} \right\},$$

$$S_q(x, y) = \min \left[1, (x^q + y^q)^{\frac{1}{q}} \right],$$

gdzie parametr $q \in \mathbb{R}^+$.



20. Wykorzystanie parametrycznych operacji Yagera do wyznaczania sumy, iloczynu i dopełniania zbiorów rozmytych.

- funkcje *Dubois'a* i *Prade'a*:

$$T_{\alpha}(x, y) = \frac{xy}{\max(x, y, \alpha)},$$

$$S_{\alpha}(x, y) = \frac{x + y - xy - \min(x, y, 1 - \alpha)}{\min(1 - x, 1 - y, \alpha)},$$

gdzie parametr $\alpha \in [0, 1]$.

- funkcje *Schweizera i Sklara*:

$$T_p(x, y) = 1 - [(1-x)^p + (1-y)^p - (1-x)^p (1-y)^p]^{\frac{1}{p}}$$

$$S_p(x, y) = (x^p + y^p - x^p y^p)^{\frac{1}{p}},$$

gdzie parametr $p \in \mathbb{R}^+$.

- funkcje *Hamacher'a*:

$$T_\alpha(x, y) = \frac{xy}{\alpha + (1-\alpha)(x+y-xy)},$$

$$S_\beta(x, y) = \frac{(\beta-1)xy + x + y}{\beta xy + 1},$$

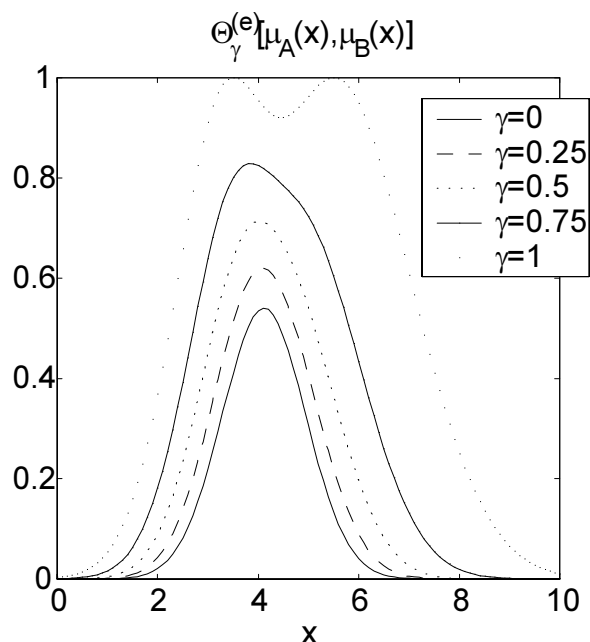
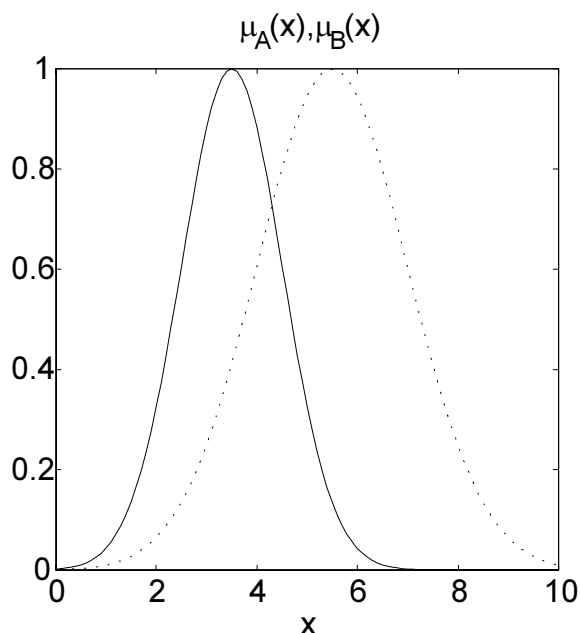
gdzie parametr $\alpha \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $\beta \in [-1, \infty)$.

- funkcje *Dombiego*:

$$T_\alpha(x, y) \triangleq \frac{1}{1 + [(x^{-1} - 1)^\alpha + (y^{-1} - 1)^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}}},$$

$$T_\alpha(x, y) \triangleq \frac{1}{1 + [(x^{-1} - 1)^{-\alpha} + (y^{-1} - 1)^{-\alpha}]^{-\frac{1}{\alpha}}},$$

gdzie $\alpha > 0$.



21. Operacja skompensowanego I.

- funkcje *Sugeno*:

$$T_{\alpha}(x, y) \triangleq \max \{0, (1 + \alpha)(x + y - 1) - \alpha xy\},$$

$$S_{\alpha}(x, y) \triangleq \min \{1, a + b - \alpha xy\},$$

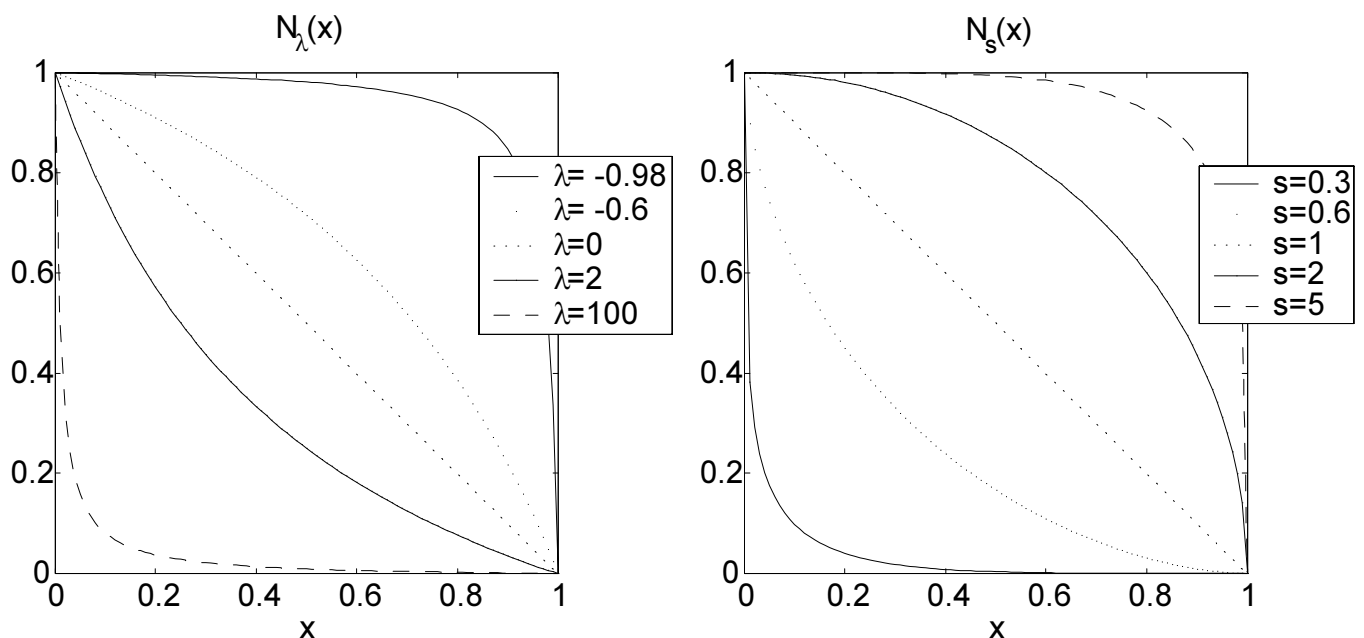
gdzie $\alpha \geq -1$.

- „skompensowane I” będące uogólnieniem operacji *t*-normy i *s*-normy.

Rodzaje tej operacji: wykładniczy $\Theta_{\gamma}^{(e)}$ oraz oparty na wypukłej kombinacji $\Theta_{\gamma}^{(c)}$:

$$\Theta_{\gamma}^{(e)}(x, y) \triangleq [T(x, y)]^{(1-\gamma)} [S(x, y)]^{\gamma},$$

$$\Theta_{\gamma}^{(c)}(x, y) \triangleq (1 - \gamma) T(x, y) + \gamma S(x, y),$$



22. Rodziny funkcji Sugeno (po lewej) i Yagera (po prawej).

gdzie $\gamma \in [0, 1]$.

Parametryczne rodziny negacji:

- funkcje *Sugeno*:

$$N_\lambda(x) = \frac{1 - x}{1 + \lambda x},$$

gdzie parametr $\lambda > -1$.

- funkcje *Yagera*:

$$N_s(x) = (1 - x^s)^{\frac{1}{s}},$$

gdzie parametr $s > 0$.

10 Dualność i inne własności norm trójkątnych

Jeżeli t -norma T , s -norma S i silna negacja n spełnia prawa deMorgana, tj.:

$$\forall_{x,y \in [0,1]} \begin{cases} n[T(x, y)] = S[n(x), n(y)], \\ n[S(x, y)] = T[n(x), n(y)] \end{cases}$$

to trójkę (T, S, n) nazywamy *trójką deMorgana*, a T i S są wzajemnie n -dualne.

Przedstawione poprzednio t -normy i s -normy są wzajemnie dualne jeżeli stosujemy w standardową negację $N(x) = 1 - x$.

Idempotentność dla zbiorów rozmytych mają dla każdego $x \in [0, 1]$ postać:

$$T(x, x) = x,$$

$$S(x, x) = x.$$

Można udowodnić, że T jest idempotentne wtedy i tylko wtedy gdy $T = \min$, i S jest idempotentne wtedy i tylko wtedy gdy $S = \max$.

Prawa absorpcji mogą być zapisane dla każdego $x \in [0, 1]$ następująco:

$$T[S(x, y), x] = x,$$

$$S[T(x, y), x] = x.$$

Pierwsze z równań jest spełnione wtedy i tylko wtedy gdy $T = \min$, drugie wtedy i tylko wtedy gdy $S = \max$.

Z kolei *prawa rozdzielności* możemy zapisać dla każdego $x \in [0, 1]$ jako:

$$S[x, T(y, z)] = T[S(x, y), S(x, z)],$$

$$T[x, S(y, z)] = S[T(x, y), T(x, z)].$$

Można udowodnić, że podobnie jak w poprzednich wypadkach pierwsze z równań jest spełnione wtedy i tylko wtedy gdy $T = \min$, drugie wtedy i tylko wtedy gdy $S = \max$.

Prawa wyłączonego środka i zaprzeczenia przyjmują dla każdego $x \in [0, 1]$ postać:

$$T[x, N(x)] = 0,$$

$$S[x, N(x)] = 1,$$

gdzie N oznacza standardową negację.

Jako przykłady t -norm dla których spełniona jest pierwsze równanie możemy podać: W , $\min_0$, Z , oraz s -norm dla których drugie równanie jest spełnione: W' , $\max_1$, Z' .

Własności identyczności przyjmują dla każdego $x \in [0, 1]$ postać:

$$T(x, 0) = 0, \quad T(x, 1) = x,$$

$$S(x, 0) = x, \quad S(x, 1) = 1,$$

i są spełnione dla dowolnych norm trójkątnych, co wynika z ich aksjomatów (warunków brzegowych).