

4 Podstawowe pojęcia związane ze zbiorami rozmytymi

- Zbiory rozmyte A i B są równe gdy:

$$\forall_{x \in \mathbb{X}} \mu_A(x) = \mu_B(x).$$

- Zbiór rozmyty A jest podzbiorem zbioru rozmytego B ($A \subseteq B$) gdy:

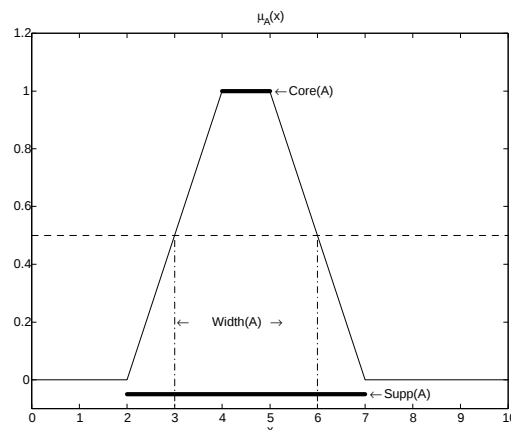
$$\forall_{x \in \mathbb{X}} \mu_A(x) \leq \mu_B(x).$$

- *Nośnikiem* (ang. support) A nazywamy zbiór (Cantora):

$$\text{Supp}(A) = \{x \in \mathbb{X} \mid \mu_A(x) > 0\}.$$

- *Rdzeniem* (ang. core) nazywamy zbiór:

$$\text{Core}(A) = \{x \in \mathbb{X} \mid \mu_A(x) = 1\}.$$



4.Nośnik i rdzeń.

- α -przekrój (ang. α -cut):

$$A_\alpha = \{x \in \mathbb{X} \mid \mu_A(x) \geq \alpha\},$$

czyli jest to zbiór o funkcji charakterystycznej:

$$\chi_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} 1, & \mu_A(x) \geq \alpha, \\ 0, & \mu_A(x) < \alpha. \end{cases}$$

- *ostrym* α -przekrój (ang. strong α -cut):

$$A_{\underline{\alpha}} = \{x \in \mathbb{X} \mid \mu_A(x) > \alpha\}.$$

Nośnik $\triangleq$ ostry 0-przekrój ($\text{Supp}(A) = A_{\underline{0}}$);

Rdzeń $\triangleq$ 1-przekrój ($\text{Core}(A) = A_1$).

Twierdzenie o dekompozycji:

$$A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha A_\alpha,$$

Czyli:

$$\mu_A(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \{\alpha \chi_{A_\alpha}(x)\} = \sup_{\alpha \in [0,1]} \{\mu_{\alpha A_\alpha}(x)\},$$

gdzie αA_α to zbiór rozmyty o funkcji przynależności: $\mu_{\alpha A_\alpha}(x) = \alpha$, dla $x \in A_\alpha$ i $\mu_{\alpha A_\alpha}(x) = 0$ dla pozostałych; sup (łac. supremum) to kres górny zbioru.

- Zbiór rozmyty posiadający niepusty rdzeń nazywamy *normalnym*.

- *Punkty krzyżowania* (ang. crossover):

$$\text{Crossover}(A) = \left\{ x \in \mathbb{X} \mid \mu_A(x) = \frac{1}{2} \right\}.$$

- *Pasmo* lub *szerokość zbioru rozmytego* (ang. Width):

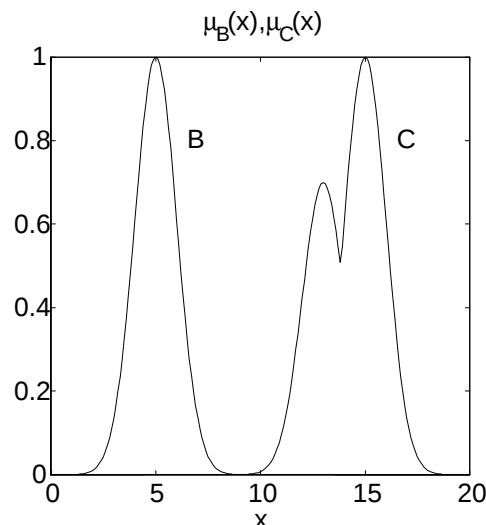
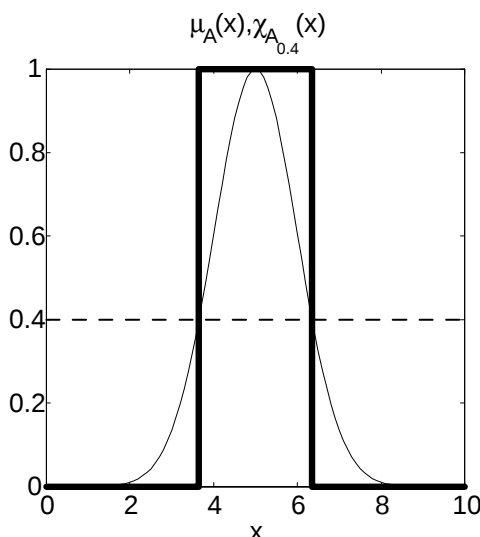
$$\text{Width}(A) = |x_2 - x_1|,$$

gdzie $\mu_A(x_1) = \mu_A(x_2) = 1/2$.

- *A jest wypukły* (ang. convex) gdy:

$$\forall_{x_1, x_2 \in \mathbb{X}} \quad \forall_{\lambda \in [0,1]} \quad \mu_A[\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2] \geq$$

$$\min [\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)].$$



5. α -przekrój; Pojęcie wypukłości.

- Wypukły i normalny zbiór rozmyty o ograniczonym nośniku definiowany na osi liczb rzeczywistych nazywamy *liczbą rozmytą*.

- Zbiór rozmyty symetryczny względem c :

$$\forall_{x \in X} \quad \mu_A(c+x) = \mu_A(c-x).$$

- Zbiór rozmyty *lewostronnie otwarty*:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \mu_A(x) = 1, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \mu_A(x) = 0, \end{cases}$$

- *prawostronnie otwarty*:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \mu_A(x) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \mu_A(x) = 1, \end{cases}$$

- *zamknięty*:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \mu_A(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \mu_A(x) = 0.$$

Najczęściej stosowane klasy funkcji przynależności:

Trójkątna o parametrach a, b, c :

$$\mu_A(x; a, b, c) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b, \\ \frac{c-x}{c-b}, & b < x \leq c, \\ 0, & x \geq c, \end{cases}$$

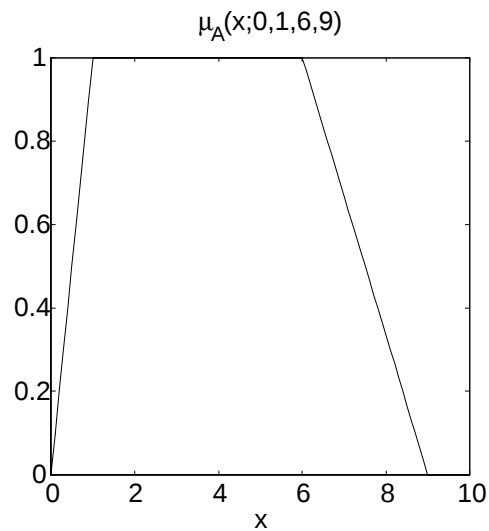
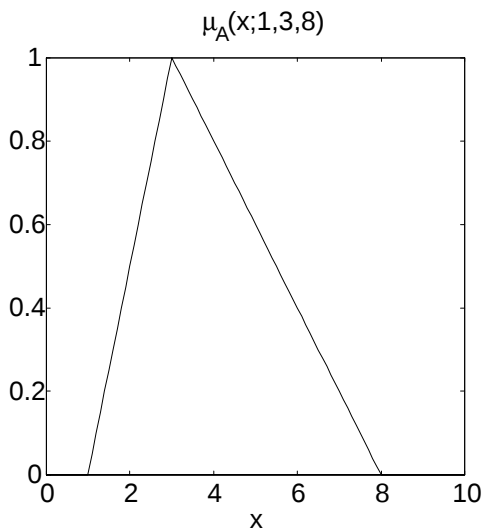
$$\mu_A(x; a, b, c) = \max \left[\min \left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b} \right), 0 \right],$$

Trapezowa o parametrach a, b, c, d :

$$\mu_A(x; a, b, c, d) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b, \\ 1, & b < x \leq c, \\ \frac{d-x}{d-c}, & c < x \leq d, \\ 0, & x \geq d, \end{cases}$$

$$\mu_A(x; a, b, c, d) = \max \left[\min \left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c} \right), 0 \right],$$

Dla $b = c$ trójkątna. Dla $a = b$ i $c = d$ prostokątna lub przedziałowa.



6. Zbiory rozmyte: trójkątny i trapezowy.

Gaussowska o parametrach $m, \sigma > 0$:

$$\mu_A(x; m, \sigma) = e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

Uogólniona dzwonowa o parametrach $m, \gamma, \sigma > 0$:

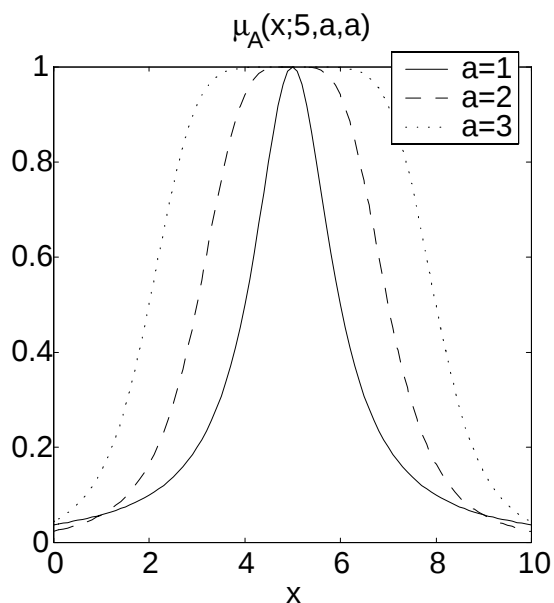
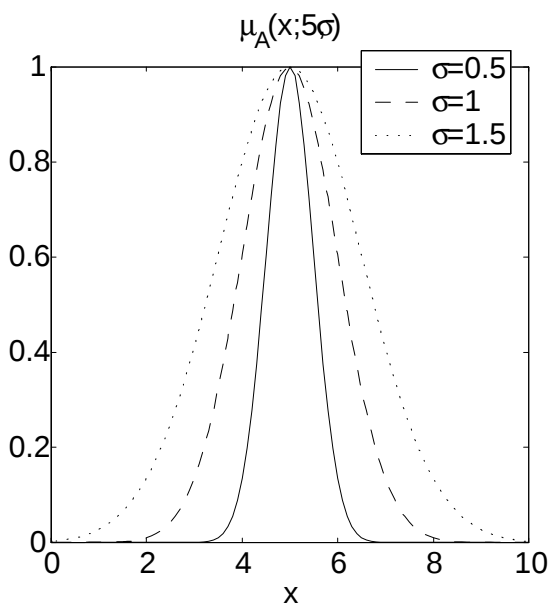
$$\mu_A(x; m, \sigma, \gamma) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x-m}{\sigma} \right|^{2\gamma}},$$

σ określa szerokość zbioru rozmytego, a σ, γ nachylenie jego zboczy.

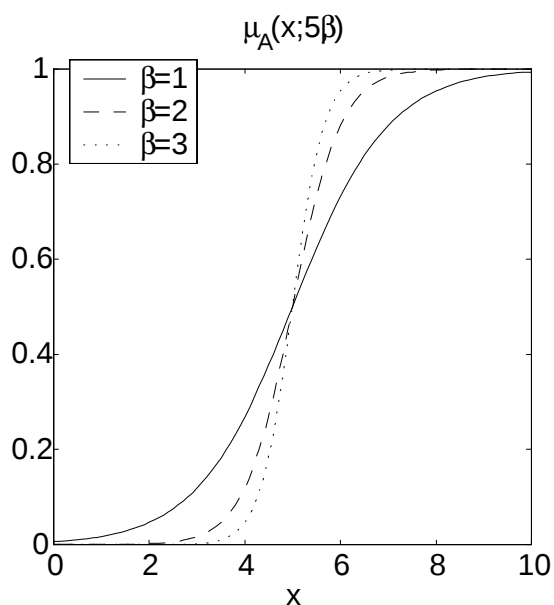
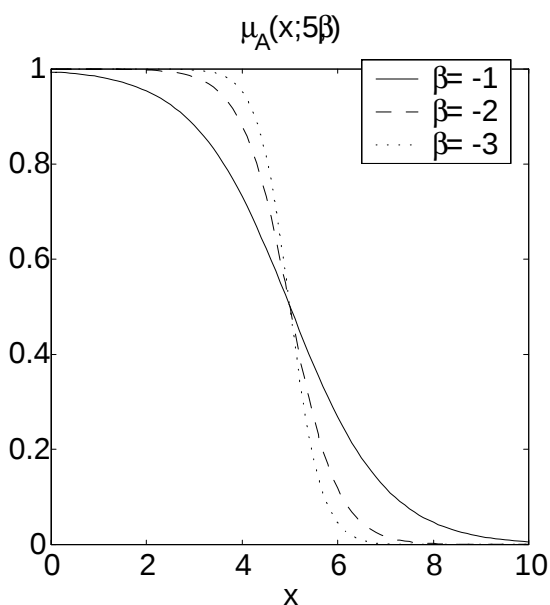
Sigmoidalna o parametrach c, β :

$$\mu_A(x; c, \beta) = \frac{1}{1 + \exp[-\beta(x - c)]}.$$

c określa p. krzyżowania, β nachylenie.



7. Gaussowski i uogólniony dzwonowy.



8. Zbiory rozmyte sigmoidalne $\beta < 0$ i $\beta > 0$.

Rozmyty singleton o parametrze x_0 :

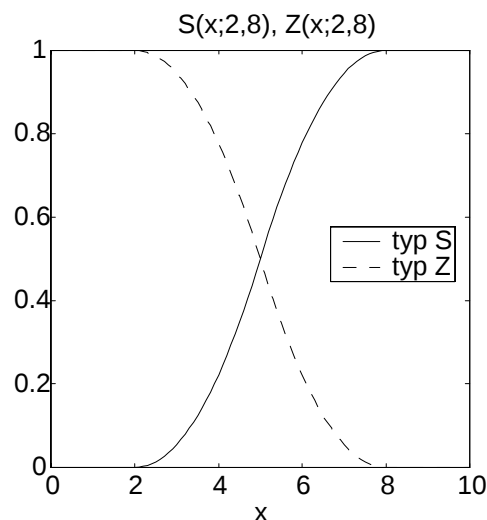
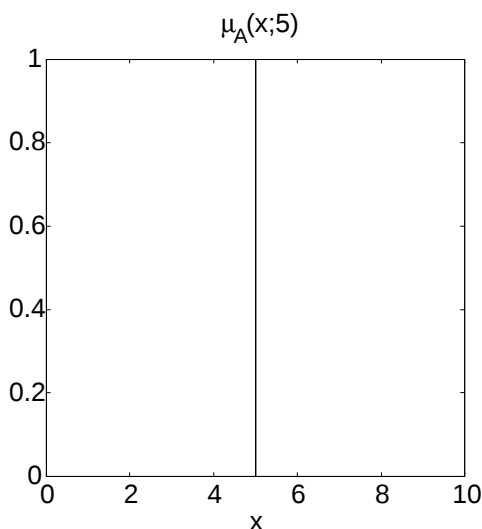
$$\mu_A(x; x_0) = \delta_{x, x_0} = \begin{cases} 1, & x = x_0, \\ 0, & x \neq x_0. \end{cases}$$

Funkcja *typu S* o parametrach a, c :

$$\mu_A(x; a, c) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ 2 \left(\frac{x-a}{c-a} \right)^2, & a < x \leq b, \\ 1 - 2 \left(\frac{x-c}{c-a} \right)^2, & b < x \leq c, \\ 1, & x \geq c, \end{cases}$$

$S(x; a, c)$. $b = (a + c) / 2$ p. krzyżowania.

Funkcja *typu Z*: $Z(x; a, c) \triangleq 1 - S(x; a, c)$.

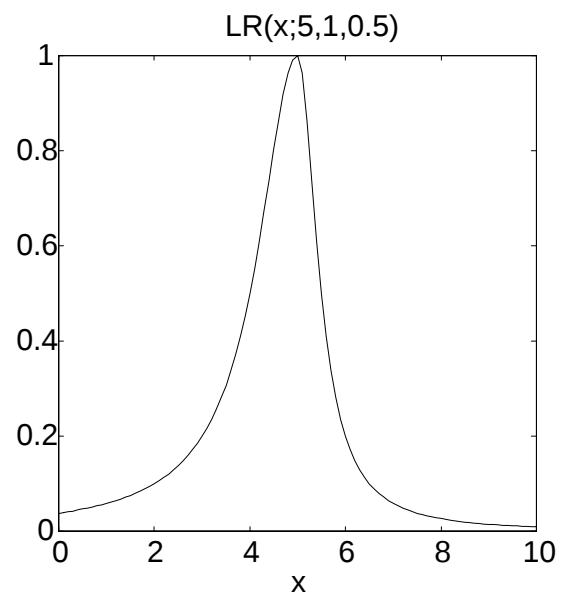
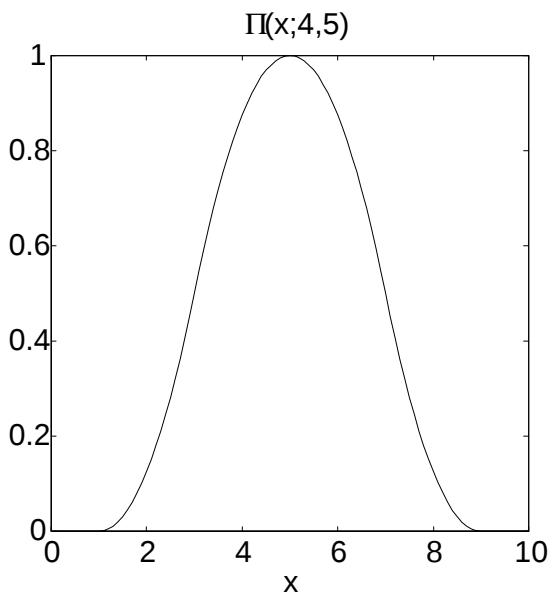


9. Zbiory rozmyte: singleton, S i Z .

Funkcja *typu Π* o parametrach a, b :

$$\mu_A(x; a, b) = \begin{cases} S(x; b-a, b), & x \leq b, \\ 1 - S(x; b, b+a), & x > b, \end{cases}$$

Oznaczane $\Pi(x; a, b)$.



10. Zbiory rozmyte: Π i typu LR .

Funkcja *typu LR-łączonego* (ang. left-right) o parametrach a, b, c :

$$\mu_A(x; a, b, c) = \begin{cases} F_L\left(\frac{a-x}{b}\right), & x \leq a, \\ F_R\left(\frac{x-a}{c}\right), & x > a, \end{cases}$$

F_L, F_R - monotonicznie malejące funkcje

na $[0, +\infty)$; $F_L(0) = F_R(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} F_L(x) =$

$\lim_{x \rightarrow \infty} F_R(x) = 0$.

Np. $1/(1+x^2), \quad 1/(1+|x|)$.

Oznaczane $LR(x; a, b, c)$.

Dla $1/(1+x^2)$ funkcja przedstawiona jest na Rys. 10.

5 Operacje na zbiorach rozmytych

Operacja iloczynu ($\cap_T$) i sumy ($\cup_S$) dla zbiorów rozmytych A, B :

$$\begin{aligned}\forall_{x \in \mathbb{X}} (A \cap_T B)(x) &= \mu_A(x) \star_T \mu_B(x) \\ &= T[\mu_A(x), \mu_B(x)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall_{x \in \mathbb{X}} (A \cup_S B)(x) &= \mu_A(x) \star_S \mu_B(x) \\ &= S[\mu_A(x), \mu_B(x)],\end{aligned}$$

gdzie $\star_T$ (lub T) to operator *t-normy*,
 $\star_S$ (lub S) to operator *s-normy*.

Operacja dopełnienia zbioru rozmytego A :

$$\mu_{\overline{A}}(x) = n[\mu_A(x)],$$

gdzie n oznacza funkcję negacji.

$$T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1], S : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1].$$

Aksjomaty dla *t-norm* ($u, r, x, y, z \in [0, 1]$):

- warunki brzegowe:

$$T(x, 1) = x, \quad T(x, 0) = 0,$$

- przemienność:

$$T(x, y) = T(y, x),$$

- monotoniczność:

$$\text{Jeżeli } x \leq u \text{ to } T(x, y) \leq T(u, y),$$

$$\text{Jeżeli } y \leq r \text{ to } T(x, y) \leq T(x, r),$$

- łączność:

$$T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z).$$

Aksjomaty dla s -norm ($u, r, x, y, z \in [0, 1]$):

- warunki brzegowe:

$$S(x, 1) = 1, \quad S(x, 0) = x,$$

- przemienność:

$$S(x, y) = S(y, x),$$

- monotoniczność:

$$\text{Jeżeli } x \leq u \text{ to } S(x, y) \leq S(u, y),$$

$$\text{Jeżeli } y \leq r \text{ to } S(x, y) \leq S(x, r),$$

- łączność:

$$S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z).$$

Najczęściej stosowane t -normy:

- Zadeha

$$M(x, y) = \min(x, y),$$

- Algebraiczna

$$\Pi(x, y) = x \cdot y,$$

- Łukasiewicza

$$W(x, y) = \max(x + y - 1, 0),$$

- Fodora

$$\min_0(x, y) = \begin{cases} \min(x, y), & \text{dla } x + y > 1 \\ 0, & \text{dla } x + y \leq 1 \end{cases},$$

- Drastyczna

$$Z(x, y) = \begin{cases} \min(x, y), & \text{dla } \max(x, y) = 1 \\ 0, & \text{dla pozostałych} \end{cases},$$

- Einsteina

$$E(x, y) = \frac{xy}{2 - (x + y - xy)}.$$

Najczęściej stosowane s -normy:

- Zadeha

$$M'(x, y) = \max(x, y),$$

- Probabilistyczna

$$\Pi'(x, y) = x + y - xy,$$

- Łukasiewicza

$$W'(x, y) = \min(x + y, 1),$$

- Fodora

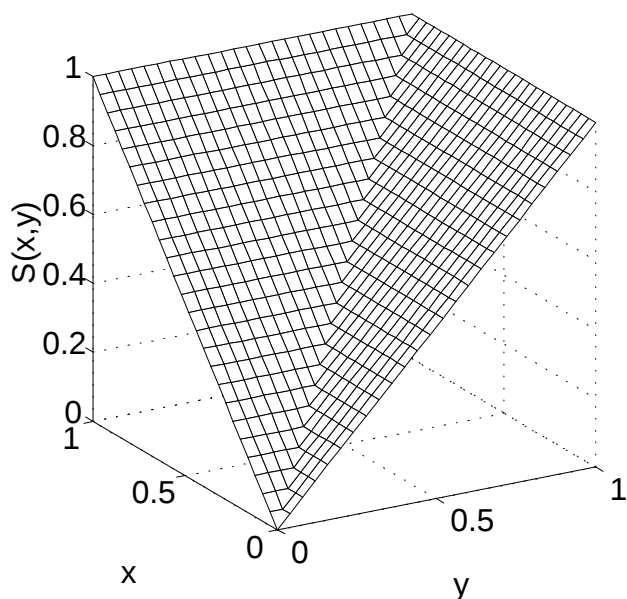
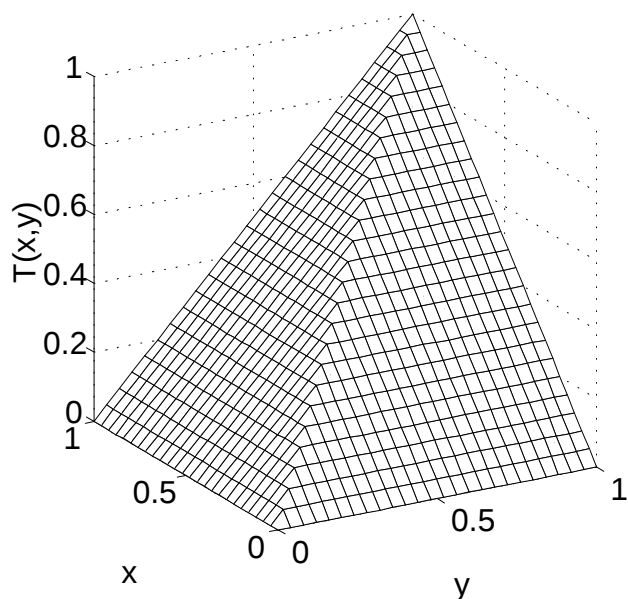
$$\max_1(x, y) = \begin{cases} \max(x, y), & \text{dla } x + y < 1 \\ 1, & \text{dla } x + y \geq 1 \end{cases},$$

- Drastyczna

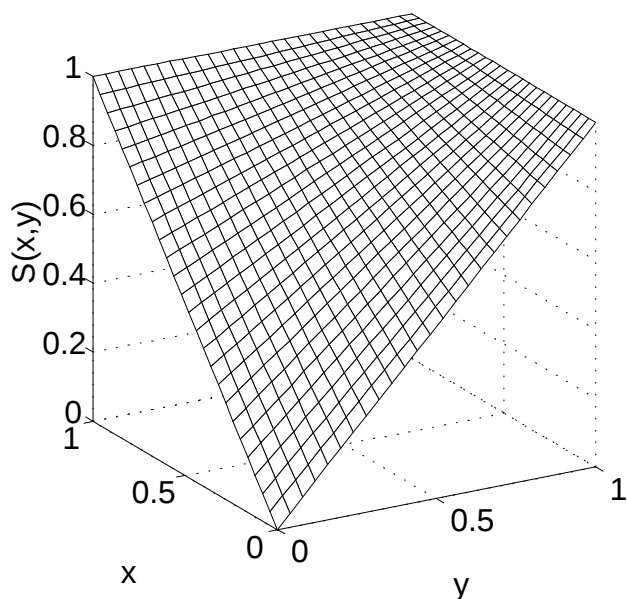
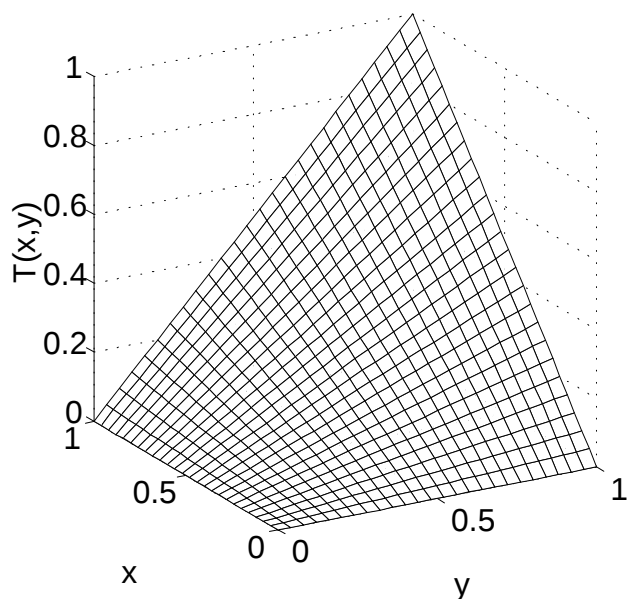
$$Z'(x, y) = \begin{cases} \max(x, y), & \text{dla } \min(x, y) = 0 \\ 1, & \text{dla pozostałych} \end{cases},$$

- Einsteina

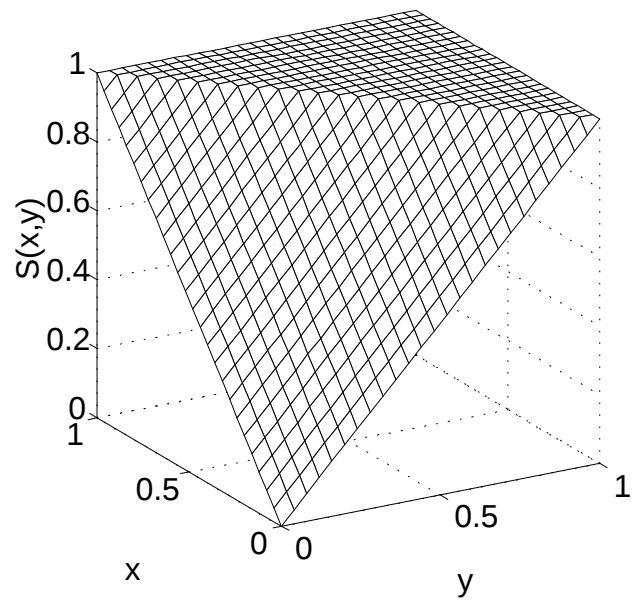
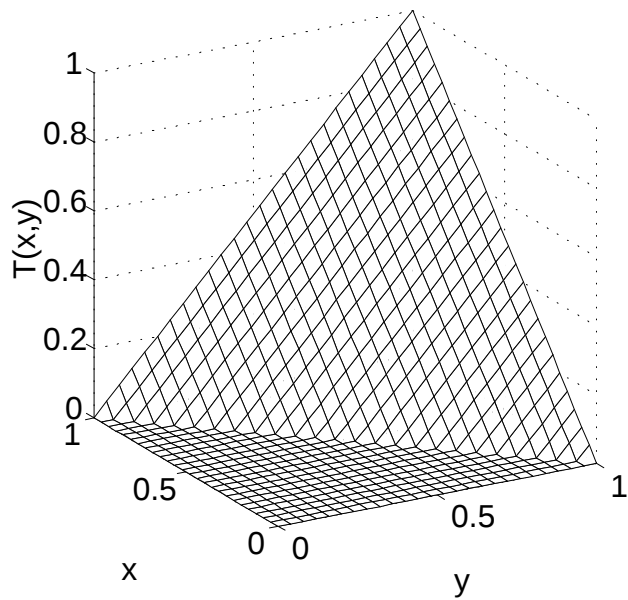
$$E'(x, y) = \frac{x + y}{1 + xy}.$$



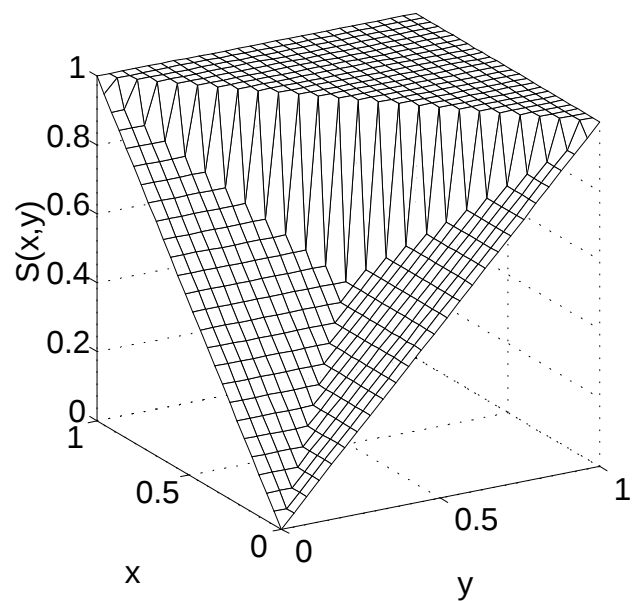
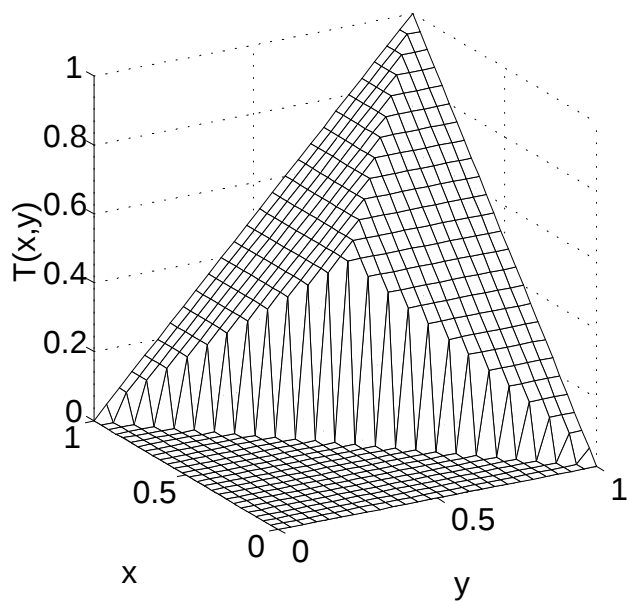
11. t -norma i s -norma Zadeha.



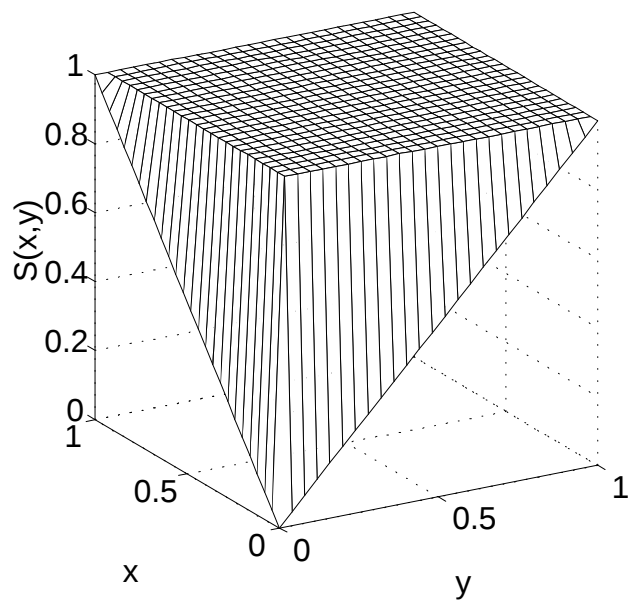
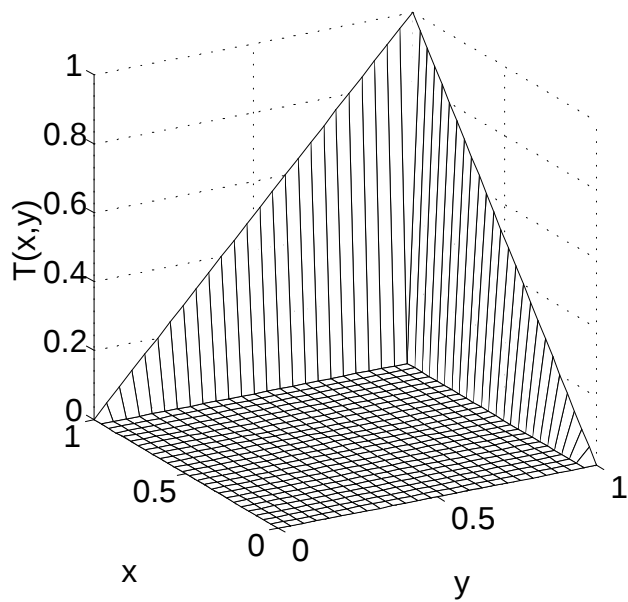
12. t -norma algebraiczna i s -norma probabilistyczna.



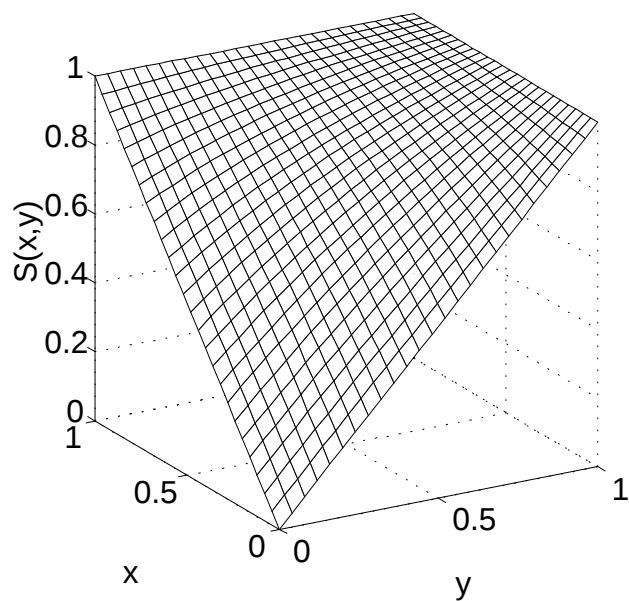
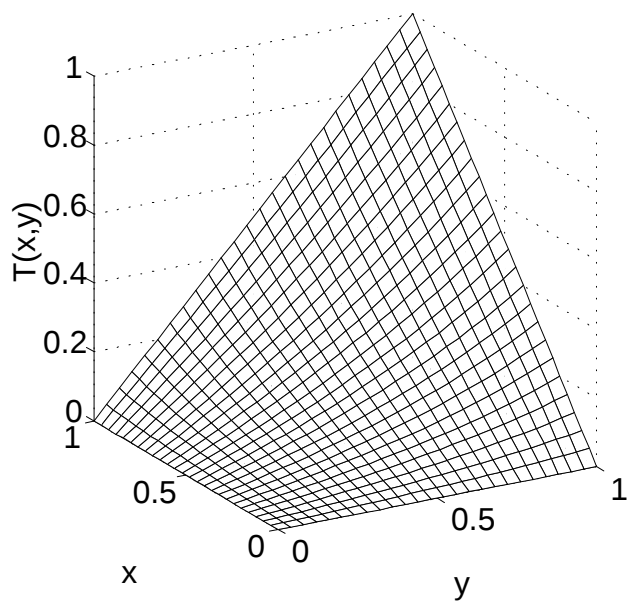
13. t -norma i s -norma Łukasiewicza.



14. t -norma i s -norma Fodora.



15. Drastyczna t -norma i s -norma.



16. t -norma i s -norma Einsteina.

Aksjomaty *Funkcji negacji* $n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$;
 $n(0) = 1, n(1) = 0$.

- n jest funkcja ściśle malejąca,
- n jest funkcją ciągłą,
- $n[n(x)] = x$, dla każdego $x \in [0, 1]$.

Ścisła negacja (ang. strict negation) jeżeli spełnia 1° i 2°.

Silną negacja (ang. strong negation) jeżeli spełnia 1°, 2° i 3°.

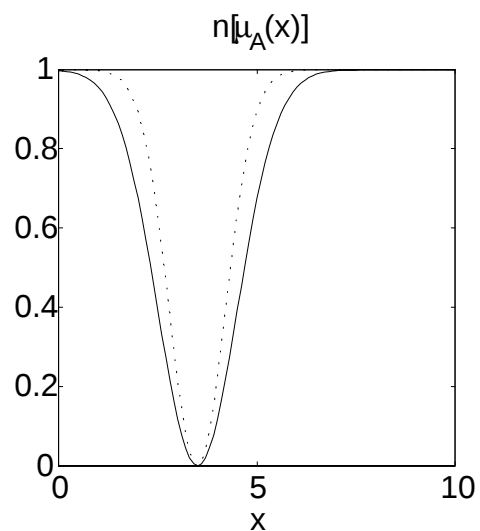
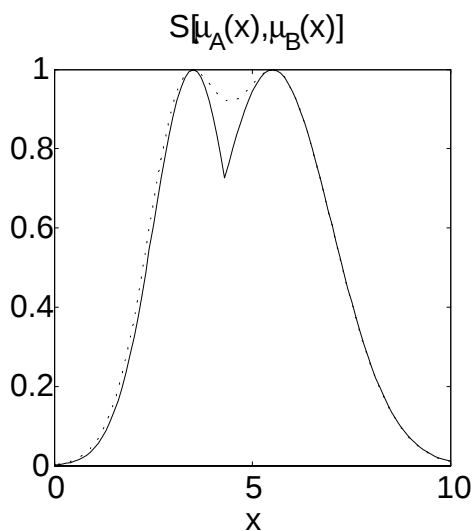
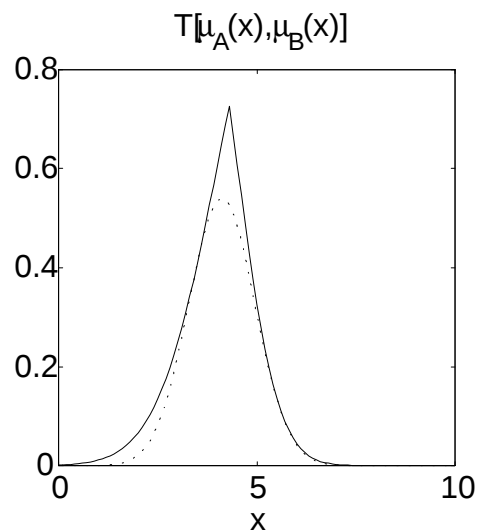
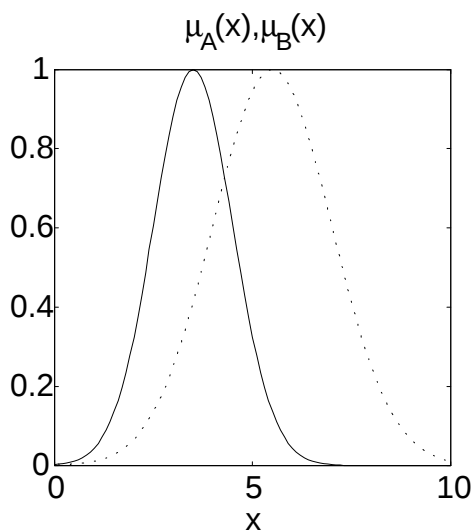
$N(x) := 1 - x$ to *negacja standardowa*.

Dowolna negacja n spełnia nierówności:

$$\forall_{x \in [0,1]} \quad n_i(x) \leq n(x) \leq n_{di}(x),$$

gdzie $n_i(x)$ i $n_{di}(x)$ są intuicjonistyczną i podwójnie intuicjonistyczną negacją:

$$n_i(x) \triangleq \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases}$$
$$n_{di}(x) \triangleq \begin{cases} 1, & x < 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$



17.Przekrój, suma i dopełnienie.

Jednoargumentowe operacje na zbiorach rozmytych:

- *koncentracja* - $\text{CON}(A)$:

$$\mu_{\text{CON}(A)}(x) = [\mu_A(x)]^2,$$

- *rozszerzanie* - $\text{DIL}(A)$:

$$\mu_{\text{DIL}(A)}(x) = \sqrt[2]{\mu_A(x)},$$

- *intensyfikacja kontrastu* (zwiększanie kontrastu) - $\text{INT}_\alpha(A)$:

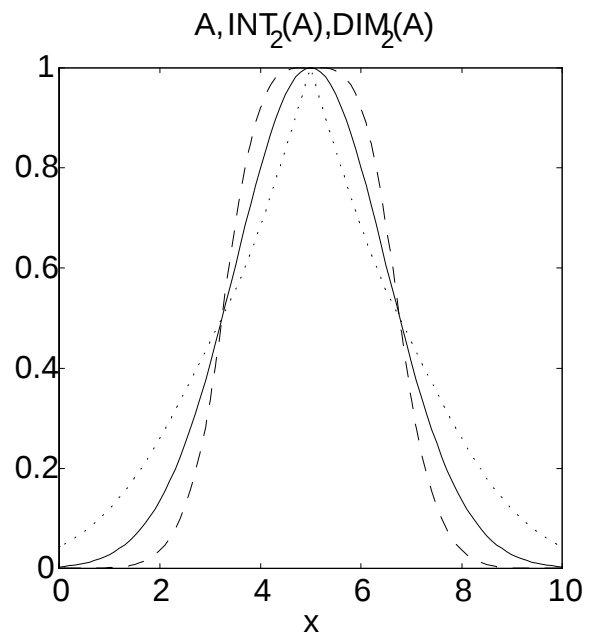
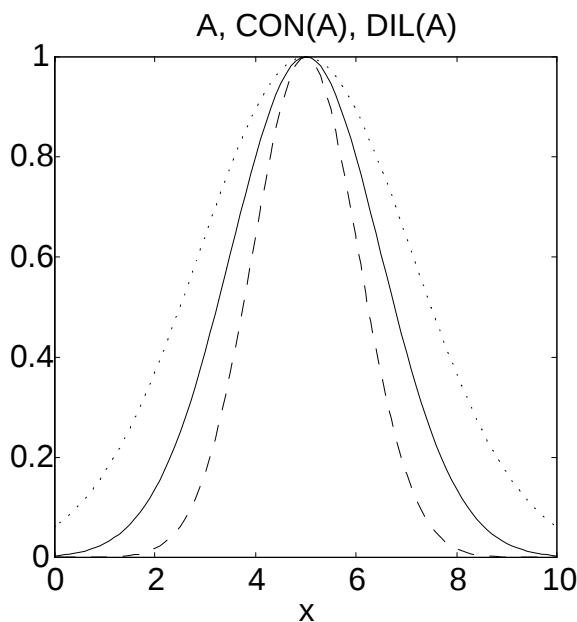
$$\mu_{\text{INT}_\alpha(A)}(x) = \begin{cases} 2^{\alpha-1} [\mu_A(x)]^\alpha, & \mu_A(x) < \frac{1}{2}, \\ 1 - 2^{\alpha-1} [1 - \mu_A(x)]^\alpha & \mu_A(x) \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

gdzie $\alpha > 1$. Najczęściej $\alpha = 2$.

- *zmniejszanie kontrastu* - $\text{DIM}_\alpha(A)$:

$$\mu_{\text{DIM}_\alpha(A)}(x) = \begin{cases} \sqrt[\alpha]{\mu_A(x) / 2^{\alpha-1}}, & \mu_A(x) < \frac{1}{2}, \\ 1 - \sqrt[\alpha]{[1 - \mu_A(x)] / 2^{\alpha-1}} & \mu_A(x) \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

gdzie $\alpha > 1$. Najczęściej $\alpha = 2$.



18. Koncentracja, rozszerzanie oraz zwiększanie i zmniejszanie kontrastu.