

6 Miary rozmytości zbioru

Miary rozmytości pozwalają określić stopień niepewności (rozmytości) dla zbiorów rozmytych (ang. measure of fuzziness).

- oparte na entropowej miarze informacji Shannona,
- oparte na określaniu stopnia podobieństwa zbioru i jego dopełnienia
- oparte na wyznaczaniu odległości.

Definicja De Luca i Terminiego, H ma następujące własności:

- dla zbioru klasycznego A_K , $H(A_K) = 0$,
- przyjmuje maksimum dla zbioru $\mu_A(x) = \frac{1}{2}$, $x \in \mathbb{X}$,
- jeżeli $\mu_A(x) \leq \mu_{A^*}(x)$, dla $\mu_A(x) \geq \frac{1}{2}$ i $\mu_A(x) \geq \mu_{A^*}(x)$, dla $\mu_A(x) \leq \frac{1}{2}$, to $H(A^*) \leq H(A)$,
- dla standardowego dopełnienia $H(\overline{A}) = H(A)$.

$$H : \mathcal{F}(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{R}^+.$$

Szeroką klasę *entropowych miar rozmytości* względem miary ν na $\mathbb{X}$, zapisujemy jako:

$$H(A) \triangleq F_1 \left\{ \int_{\mathbb{X}} h[\mu_A(x)] d\nu \right\},$$

gdzie $d\nu = dx$ lub $d\nu = p(x) dx$, gdzie $p(x)$ jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa (*rozmyto-probabilistyczną miarę*).

$h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ jest rosnąca na $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ i malejąca na $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ oraz spełnia $h(0) = h(1) = 0$.

$F_1 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ oraz spełniającą $F_1(0) = 0$.

Najczęściej stosowane funkcje $h(x)$ to:

$$h(x) = \begin{cases} x, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ 1 - x, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$$

$$h(x) = 2x(1 - x), \quad x \in [0, 1],$$

$$h(x) = -\frac{1}{2}x \log_2 x - \frac{1}{2}(1 - x) \log_2 (1 - x).$$

Jako funkcję F_1 stosujemy najczęściej

$$F_1(x) = x^2$$

Parametryczne wersje funkcji $h(x)$:

$$h_{\lambda}(x) = \begin{cases} h(x), & x \in (\lambda, 1 - \lambda), \\ 0, & \text{dla pozostałych.} \end{cases}$$

$$h_{\lambda}(x) = \begin{cases} h(x), & x \in [\lambda, 1], \\ 0, & \text{dla pozostałych.} \end{cases}$$

Energetyczna miara rozmytości E . Własności:

- $E(A) = 0$ dla zbioru $\mu_A(x) = 0, x \in \mathbb{X}$,
- wartość maksymalna dla zbioru $\mu_A(x) = 1, x \in \mathbb{X}$,
- jeżeli $A \subseteq B$, to $E(A) \leq E(B)$.

Szeroką klasę tych miar $E : \mathcal{F}(\mathbb{X}) \rightarrow [0, +\infty)$ zapisujemy jako:

$$E(A) \triangleq F_2 \left\{ \int_{\mathbb{X}} f[\mu_A(x)] d\nu \right\},$$

gdzie f jest funkcją rosnącą, $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ oraz spełniającą $f(0) = 0$. F_2 jest rosnącą funkcją $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ o własności $F_2(0) = 0$.

Stosujemy parametryczną wersję funkcji f :

$$f_{\lambda}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [\lambda, 1], \\ 0, & \text{dla pozostałych.} \end{cases}$$

Yager zaproponował miarę:

$$D_p(A, \overline{A}) = \left\{ \int_{\mathbb{X}} [\mu_A(x) - \mu_{\overline{A}}(x)]^p dx \right\}^{\frac{1}{p}},$$

gdzie $p \in [1, +\infty)$.

Jeżeli $S_A = \text{Supp}(A)$, to $D_1(A, \overline{A}) = \|S_A\|$.

Ostatecznie miarę rozmytości definiujemy jako:

$$H_Y(A) \triangleq 1 - \frac{D_p(A, \overline{A})}{\|S_A\|}.$$

Kaufmann zaproponował miarę odległości zbioru rozmytego A i najbliższego zbioru klasycznego $A^{(n)}$: $H_{Ka}(A) \triangleq K D_p(A, A^{(n)})$, gdzie K współczynnik proporcjonalności, Najbliższy zbiór klasyczny to 0.5-przekrój: $A^{(n)} = A_{0.5}$. Modyfikację zaproponował Kosko: $H_{Ko}(A) \triangleq D_p(A, A^{(n)}) / D_p(A, \overline{A^{(n)}})$.

7 Inne typy zbiorów

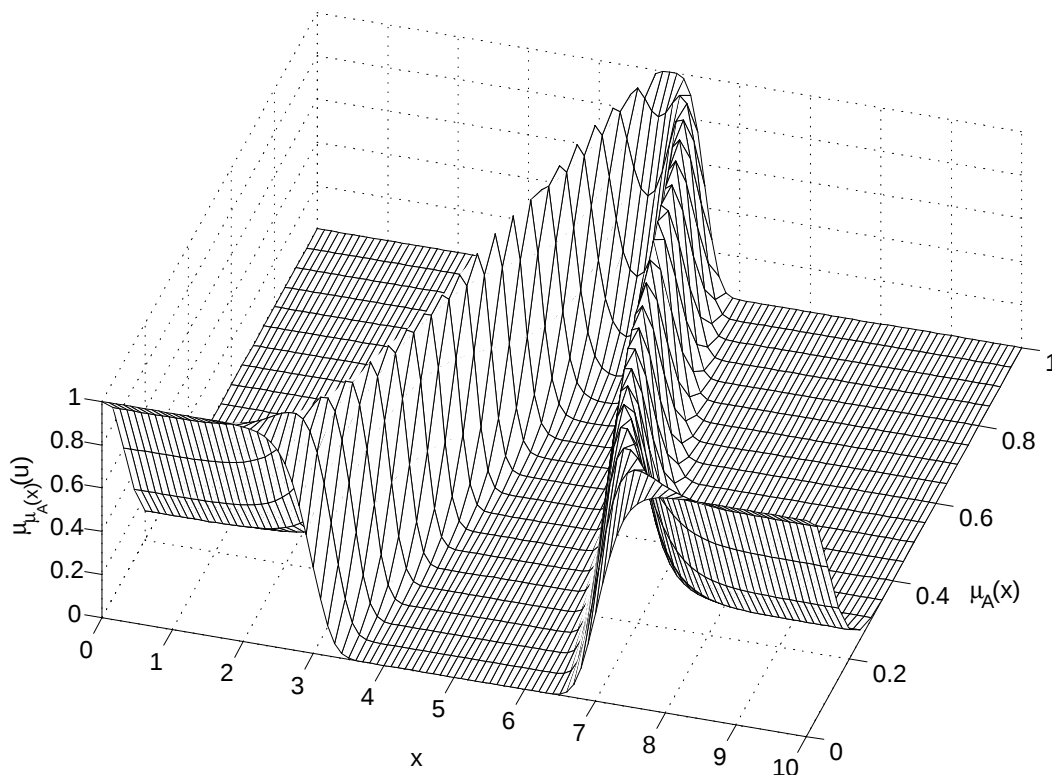
W 1973 r. Zadeh zauważył, że w zbiorach rozmytych kryje się pewien paradoks. Opisują pojęcia niepewne ale wartości funkcji przynależności są precyzyjne.

Zbiory rozmyte typu-2:

$$\hat{A} = \left\{ \left(x, \mu_{\hat{A}}(x) \right) \mid x \in \mathbb{X} \right\},$$

gdzie $\mu_{\hat{A}}(x)$ są zbiorami rozmytymi:

$$\mu_{\hat{A}}(x) = \left\{ \left(u, \mu_{\mu_{\hat{A}}(x)}(u) \right) \mid u, \mu_{\mu_{\hat{A}}(x)}(u) \in [0, 1] \right\}.$$



19. Przykładowy zbiór rozmyty typu-2.

Przykład: Niech na przestrzeni $\mathbb{X} = \{1, 2, 3, 4\}$ zdefiniujemy zbiór rozmyte typu-2:

$$\hat{A} = \left\{ \left(x, \mu_{\hat{A}}(x) \right) \mid x \in \{1, 2, 3, 4\} \right\},$$

gdzie dla $x = 2$ mamy:

$$\mu_{\hat{A}}(2) = 0.7/1 + 0.6/0.5 + 0.4/0.2.$$

Zbiory rozmyte typu- Φ , nazywane inaczej *zbiorami rozmytymi przedziałowymi*, w których mamy odwzorowanie $\mathbb{X}$ na podprzedział $[0, 1]$. Zbiory te przedstawiamy jako parę odwzorowań: $A^-, A^+ : \mathbb{X} \rightarrow [0, 1]$, gdzie A^- i A^+ są górnym i dolnym ograniczeniem. $A_{\Phi} \triangleq (A^-, A^+)$ lub jako zbiór uporządkowanych trójek:

$$A_{\Phi} \triangleq \left\{ (x, \mu_{A^-}(x), \mu_{A^+}(x)) \mid \begin{array}{l} x \in X, \\ \mu_{A^-}(x) \leq \mu_{A^+}(x) \end{array} \right\}.$$

Jeżeli mamy zbiory: $A_{\Phi} \triangleq (A^-, A^+)$ i $B_{\Phi} \triangleq (B^-, B^+)$, to operacje definiowane są: $A_{\Phi} \cup B_{\Phi} \triangleq (A^- \cup B^-, A^+ \cup B^+)$, $A_{\Phi} \cap B_{\Phi} \triangleq (A^- \cap B^-, A^+ \cap B^+)$, $\overline{A_{\Phi}} \triangleq (\overline{A^-}, \overline{A^+})$.

Goguen zaproponował zastąpienie $[0, 1]$ kratą L . Są to *zbiory rozmyte typu- L* . Dla zbiorów rozmytych typu- L suma i przekrój są definiowane jako najmniejszy kres górny i największy kres dolny.

Hirota wprowadził *zbiory probabilistyczne*. $\mathbb{X} \times \Omega \rightarrow [0, 1]$, gdzie Ω jest *przestrzenią zdarzeń elementarnych*. Dla zbiorów probabilistycznych funkcja przynależności zależy od elementów przestrzeni $\mathbb{X}$ i Ω i nazywa się *funkcją definiującą*. Zbiór probabilistyczny możemy zapisać następująco:

$$A_p \triangleq \left\{ \left(x, \omega, \mu_{A_p}(x, \omega) \right) \mid x \in \mathbb{X}, \omega \in \Omega \right\}.$$

Funkcję przynależności możemy rozumieć jako realizację funkcji definiującej.

Zbiory autentyczne (ang. genuine sets) wprowadzone przez Demirci. Autentyczną przynależność elementu x do zbioru A zapisujemy jako $x \overset{g}{\in} A$. Stopień prawdy

tej przynależności oznaczamy $\tau \left[x \overset{g}{\underset{\varphi}{\in}} A \right] = \mu_A(x)$. Jest to zbiór autentyczny 0-ego rzędu - tradycyjny zbiór rozmyty. Zbiór autentyczny 1-ego stopnia określa pewną niepewność $\varphi \in [0, 1]$ do stopnia prawdy τ : $\tau \left[x \overset{g}{\underset{\varphi}{\in}} A \right] = g_A(x, \varphi)$. Czyli jest to odwzorowanie $g_A : \mathbb{X} \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Przykładowo jeżeli mamy $X \in \{a, b\}$, to tradycyjny zbiór rozmyty zapisujemy jako $A = \{(a, \mu_A(a)), (b, \mu_A(b))\}$. Jeżeli z powyższymi wartościami funkcji przynależności zwiążemy niepewności φ_a, φ_b , to mamy następujący zbiór autentyczny:

$$A_A = \left\{ \begin{array}{l} (a, \varphi_a, \mu_A(a)), (b, \varphi_b, \mu_A(b)), \\ (x, \varphi, 0) \mid \text{dla pozostałych} \end{array} \right\}.$$

Zbiory przybliżone (ang. rough sets) wprowadzone zostały przez Pawlaka. Jeżeli przez R oznaczymy relację równoważności na $\mathbb{X}$, nazywana *relacją nierozróżnialności*,

to parę $S = (\mathbb{X}, R)$ nazywamy *przestrzenią aproksymacji*. Dla niepustego podzbioru C przestrzeni $\mathbb{X}$ definiujemy *aproksymację dolną*:

$$\underline{A}(C) \triangleq \{x \in \mathbb{X} \mid [x]_R \subseteq C\},$$

i *aproksymację górną*:

$$\overline{A}(C) \triangleq \{x \in \mathbb{X} \mid [x]_R \cap C \neq \emptyset\}$$

zbioru C w przestrzeni S , gdzie $[x]_R$ oznacza *klasę równoważności* relacji R zawierającą element x . $A(C) \triangleq (\underline{A}(C), \overline{A}(C))$.

Zbiór przybliżony może być podstawą do stworzenia zbioru rozmytego. Dla elementu $x \in \mathbb{X}$, stopień przybliżonego zawierania się x w C można wyznaczyć jako: $\text{Card}\{[x]_R \cap C\} / \text{Card}\{[x]_R\}$. Stąd *zbiór rozmyto-przybliżony* możemy zdefiniować następująco:

$$C_{PR} \triangleq \left\{ \left(x, \mu_C^{(PR)}(x) \right) \mid \mu_C^{(PR)}(x) = \frac{\text{Card}\{[x]_R \cap C\}}{\text{Card}\{[x]_R\}} \right\}$$

Atanassow wprowadził koncepcję *intuicjonistycznego zbioru rozmytego*:

$$A_I \triangleq \{(x, \mu_A(x), \gamma_A(x)) \mid x \in \mathbb{X}\},$$

gdzie μ_A jest *funkcją przynależności*, a γ_A jest *funkcją nieprzynależności*. Funkcje te dla każdego $x \in \mathbb{X}$ spełniają nierówności:

$$0 \leq \mu_A(x) + \gamma_A(x) \leq 1.$$

Pedrycza wprowadził *zbiory cieniowane* (ang. shadowed sets). $A_S : X \rightarrow \{0, 1, [0, 1]\}$. Funkcji przynależności zbioru cieniowanego możemy zapisać jako:

$$\mu_{A_S}(x) \triangleq \begin{cases} 0, & \mu_A(x) < \alpha, \\ [0, 1], & \mu_A(x) \in [\alpha, 1 - \alpha], \\ 1, & \mu_A(x) > 1 - \alpha. \end{cases}$$

Poziom α może być przyjęty arbitralnie, np. jako $\alpha = 0.2$ lub określany na podstawie minimalizacji skalarne go wskaźnika

jakości:

$$V(\alpha) \triangleq \left| \begin{array}{c} \int_{-\infty}^{a_\alpha} \mu_A(x) dx + \int_{a_{1-\alpha}}^{+\infty} [1 - \mu_A(x)] dx \\ - \int_{a_\alpha}^{a_{1-\alpha}} \mu_A(x) dx \end{array} \right|,$$

gdzie $\mu_A(a_\alpha) = \alpha$, $\mu_A(a_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$.

Powyższy wskaźnik przyjmuje wartość minimalną, gdy suma pól powierzchni pod obniżaną i nad podwyższaną częścią funkcji przynależności jest najbliższa polu powierzchni pod funkcją przynależności w obszarze cienia. Stąd $\alpha_{\text{opt}} = \min_{\alpha \in [0, \frac{1}{2})} V(\alpha)$.

1. Operacje na zbiorach cieniowanych.

Operacja	$A_S \cup B_S$	$A_S \cap B_S$	$\overline{A_S}$
	0 $[0, 1]$ 1	0 $[0, 1]$ 1	
0	0 $[0, 1]$ 1	0 0 0	1
$[0, 1]$	$[0, 1]$ $[0, 1]$ 1	0 $[0, 1]$ $[0, 1]$	$[0, 1]$
1	1 1 1	0 $[0, 1]$ 1	0