

1 Pojęcie zbioru klasycznego

Teoria mnogości

Twórca G. Cantor (1845-1918)

Pojęcie pierwotne (bez definicji)

Zazwyczaj przez *klasyczny zbiór* rozumiemy kolekcję obiektów o pewnych własnościach wyróżniających je spośród innych obiektów.

Zbiory oznaczamy $A, B, C, \dots$,

Obiekty oznaczamy $z, y, x, \dots$

$x \in A, x \notin A$.

Przestrzeń $\mathbb{X}$. $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ lub $2^{\mathbb{X}}$ zbiór (mногоść) wszystkich podzbiorów $\mathbb{X}$:

$$\mathcal{P}(\mathbb{X}) \triangleq \{A \mid A \subseteq \mathbb{X}\},$$

gdzie $\subseteq$ to inkluzja zbiorów definiowana:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall_{x \in \mathbb{X}} x \in A \implies x \in B.$$

Zbiór pusty $\emptyset = \{\}$.

$$\emptyset, \mathbb{X} \in \mathcal{P}(\mathbb{X}).$$

Operacje sumy (złączenia) ($\cup$):

$$A \cup B \triangleq \{x \in \mathbb{X} \mid x \in A \text{ lub } x \in B\},$$

iloczynu (przekroju, części wspólnej) ($\cap$):

$$A \cap B \triangleq \{x \in \mathbb{X} \mid x \in A \text{ i } x \in B\},$$

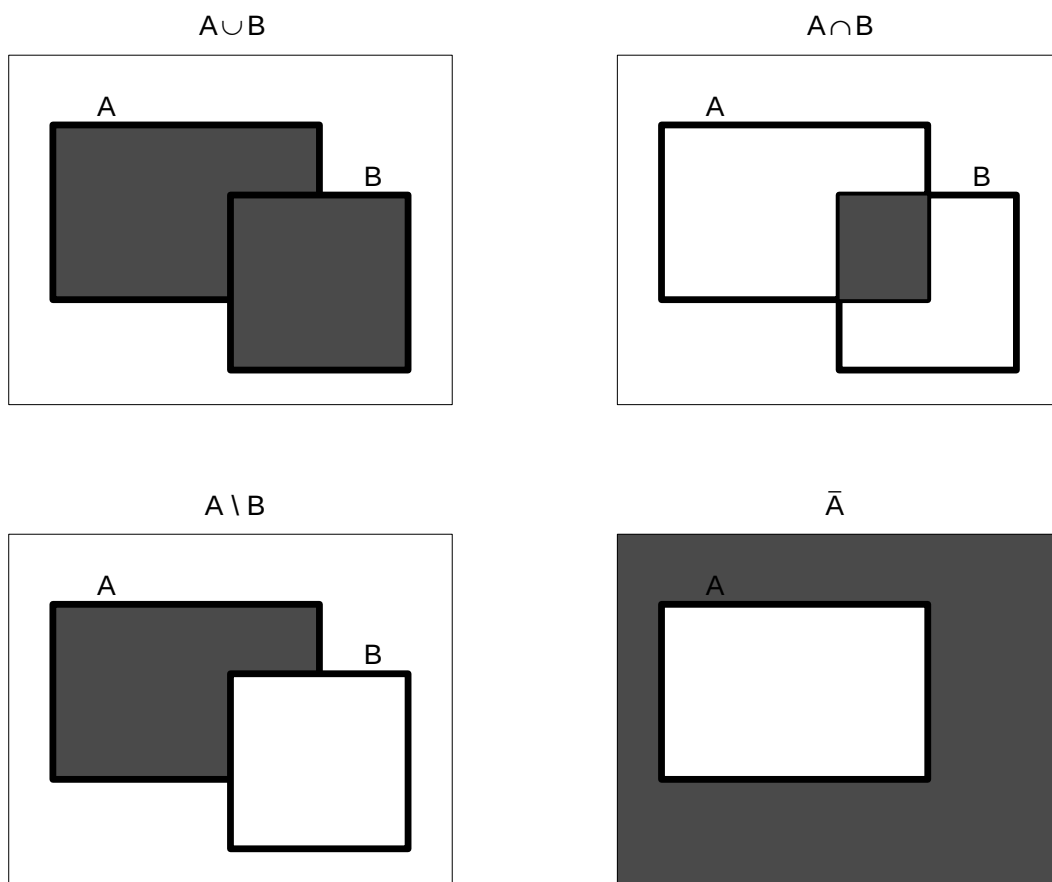
dopełnienia ($^-$):

$$\bar{A} \triangleq \{x \in \mathbb{X} \mid x \notin A\},$$

różnicy ($\setminus$):

$$A \setminus B \triangleq \{x \in \mathbb{X} \mid x \in A \text{ i } x \notin B\},$$

gdzie $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{X})$.



1.Schematy Venna.

Mnogość $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ tworzy algebrę Boole'a ze względu na sumę, iloczyn i dopełnienie zbiorów.

przemienność: $A \cup B = B \cup A,$

$$A \cap B = B \cap A,$$

łączność: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

idempotentność: $A \cup A = A,$

$$A \cap A = A,$$

absorpcja: $A \cup (A \cap B) = A,$

$$A \cap (A \cup B) = A,$$

rozdzielność: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

identyczność: $A \cup \emptyset = A, \quad A \cup \mathbb{X} = \mathbb{X},$

$$A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cap \mathbb{X} = A,$$

inwolucja: $\overline{(\overline{A})} = A,$

$$\overline{\emptyset} = \mathbb{X},$$

$$\overline{\mathbb{X}} = \emptyset,$$

prawa wyłączonego środka: $A \cup \overline{A} = \mathbb{X},$

$$A \cap \overline{A} = \emptyset.$$

Prawa deMorgana:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Funkcja charakterystyczna:

$$\chi_A : \mathbb{X} \rightarrow \{0, 1\},$$

gdzie:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{dla } x \in A, \\ 0, & \text{dla } x \notin A. \end{cases}$$

Zbiór wszystkich χ na przestrzeni $\mathbb{X}$ to $\mathcal{C}(\mathbb{X})$:

$$\mathcal{C}(\mathbb{X}) \triangleq \{\chi \mid \chi : \mathbb{X} \rightarrow \{0, 1\}\}.$$

Mnogość $\mathcal{C}(\mathbb{X})$ tworzy *algebrę Boole'a* ze względu na operacje:

$$\chi_A(x) \wedge \chi_B(x) = \min[\chi_A(x), \chi_B(x)],$$

$$\chi_A(x) \vee \chi_B(x) = \max[\chi_A(x), \chi_B(x)],$$

$$\overline{\chi_A(x)} = 1 - \chi_A(x),$$

gdzie $\chi_A, \chi_B \in \mathcal{C}(\mathbb{X})$.

Struktury $(\mathcal{P}(\mathbb{X}), \cap, \cup, \neg)$ i $(\mathcal{C}(\mathbb{X}), \wedge, \vee, \neg)$ są izomorficzne jako algebry Boole'a.

Można wprowadzić odwzorowanie $F :$

$\mathcal{P}(\mathbb{X}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{X})$ lub $F(A) = \chi_A$ dla każdego $A \subseteq \mathbb{X}$.

Dla F zachodzi:

$$F(A \cap B) = F(A) \wedge F(B),$$

$$F(A \cup B) = F(A) \vee F(B),$$

$$F(\overline{A}) = 1 - F(A).$$

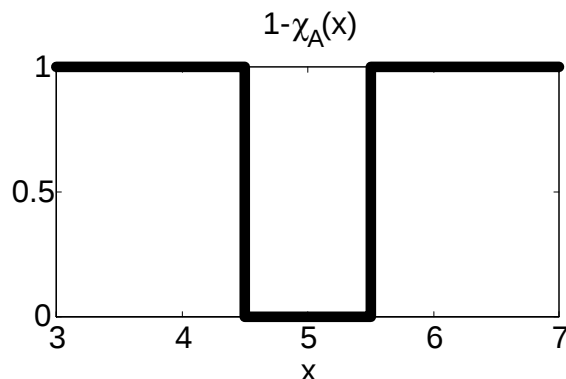
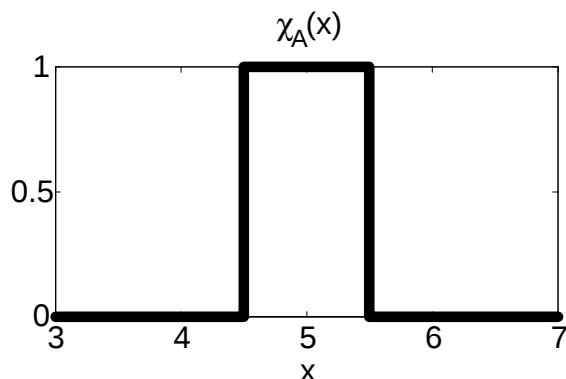
Zbiory mogą być równoważnie opisywane przez wyliczenie jego elementów lub podanie funkcji charakterystycznej.

Zbiór liczb rzeczywistych większych od 4.5 ale mniejszych od 5.5:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in (4.5, 5.5)\}$$

lub:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{dla } x \in (4.5, 5.5), \\ 0, & \text{dla pozostałych.} \end{cases}$$



2. Funkcja χ dla zbioru A i dopełnienia.

2 Zbiory rozmyte

Zbiory rozmyte (ang. fuzzy sets) dopuszczają „częściową” przynależność obiektów.

Wprowadzone przez prof. L.A. Zadeha w 1965 r. i opisane przy pomocy *funkcji przynależności*:

$$\mu_A : \mathbb{X} \rightarrow [0, 1].$$

Zbiór rozmyty A na przestrzeni $\mathbb{X}$ może być opisany przez zbiór uporządkowanych par $(x, \mu_A(x))$:

$$A = \{ (x, \mu_A(x)) \mid x \in \mathbb{X}, \mu_A(x) \in [0, 1] \}.$$

W 1973 r. prof. L.A. Zadeh zaproponował notację dla przestrzeni dyskretnej $\mathbb{X}$:

$$A = \sum_{x \in \mathbb{X}} \mu_A(x) / x,$$

oraz dla ciągłej przestrzeni $\mathbb{X}$:

$$A = \int_{\mathbb{X}} \mu_A(x) / x.$$

Dyskretna i nieuporządkowana przestrzeń:

$$\mathbb{X} = \{\text{Warszawa, Kraków, Gdańsk, ...}$$

..., Katowice, Poznań\}

A - „zbiór dużych miast polskich w których chciałbym mieszkać”:

$$A = \{(0.6, \text{Warszawa}), (1, \text{Kraków}), (0.9, \text{Gdańsk}), (0.3, \text{Katowice}), (0.7, \text{Poznań})\}$$

lub:

$$A = 0.6/\text{Warszawa} + 1/\text{Kraków} + 0.9/\text{Gdańsk} + 0.3/\text{Katowice} + 0.7/\text{Poznań}.$$

Dyskretna i uporządkowana przestrzeń

Przestrzeń $\mathbb{X} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$.

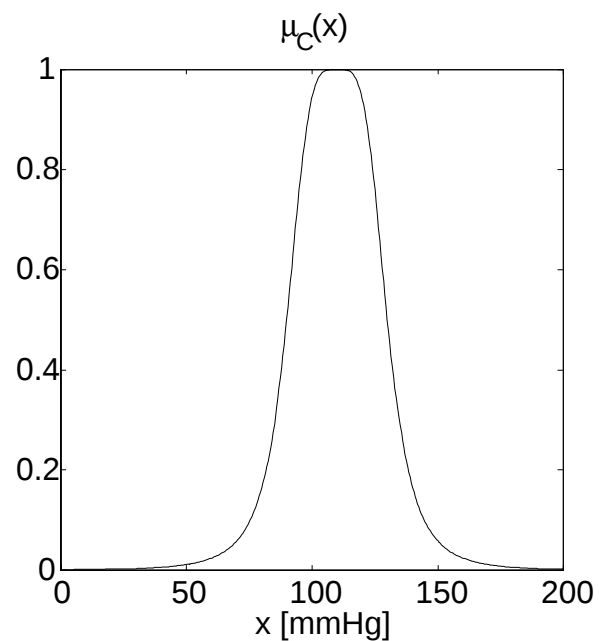
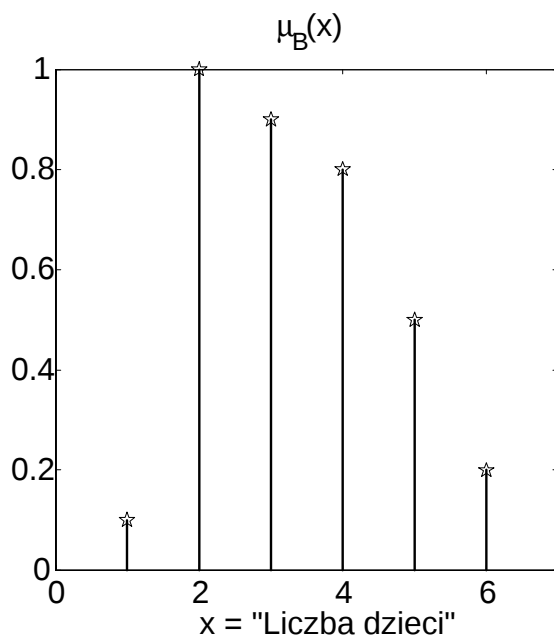
B - „Rozsądna liczba dzieci w rodzinie”:

$$B = 0.1/1 + 1/2 + 0.9/3 + 0.8/4 + 0.5/5 + 0.2/6.$$

Przestrzeń ciągła $\mathbb{X} = \mathbb{R}^+$.

C - „normalne ciśnienie skurczowe krwi”:

$$C = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{1 + \left(\frac{x-110}{20}\right)^4} / x.$$



3. Przykładowe zbiory rozmyte.

$\mathcal{F}(\mathbb{X})$ - mnogość wszystkich rozmytych podzbiorów przestrzeni $\mathbb{X}$:

$$\mathcal{F}(\mathbb{X}) = \{\mu \mid \mu : \mathbb{X} \rightarrow [0, 1]\}.$$

Mnogość $\mathcal{F}(\mathbb{X})$ nie tworzy algebry Boole'a ze względu na operacje $(\wedge)$, $(\vee)$ i $(-)$; nie są spełnione prawa wyłączonego środka i dopełnienia, czyli nie jest prawdą, że:

$$\forall_{x \in \mathbb{X}} \begin{cases} \mu_A(x) \wedge \mu_{\overline{A}}(x) = 0, \\ \mu_A(x) \vee \mu_{\overline{A}}(x) = 1. \end{cases}$$

Struktura $(\mathcal{F}(\mathbb{X}), \wedge, \vee, -)$ nie tworzy algebry Boole'a lecz tzw. *miękką algebrę* nazywaną też rozmytą lub deMorgana.

3 Interpretacja i wyznaczanie funkcji przynależności

- **Stopień podobieństwa.** $\mu_A(x)$ jako miara bliskości elementu x do prototypu (wzorca) zbioru rozmytego A . Rozmyte grupowanie danych, rozmyte sterowniki
- **Stopień preferencji.** A przedstawia zbiór bardziej lub mniej preferowanych obiektów. $\mu_A(x)$ to intensywność preferencji dotycząca obiektu x . Zbiór rozmyty reprezentuje elastyczne ograniczenie na wartość X . Rozmyta optymalizacja.
- **Stopień niepewności.** $\mu_A(x)$ to stopień możliwości, że zmiennej X przypisujemy wartość x , gdy jedyną wiedzą jaką posiadamy jest stwierdzenie „ X jest A ”. Teoria możliwości.

Funkcje przynależności wyznaczamy przez pomiar:

- **Odległości.** Jeżeli x' to prototypowy (wzorcowy) element zbioru rozmytego A , to $\mu_A(x)$ można wyznaczyć jako malejącą funkcję odległości $d(x, x')$.
- **Częstości.** $\mu_A(x)$ jest proporcjonalna do prawdopodobieństwa $P(A|x)$, tj. względnej częstości z jaką element x był uznawany w losowym eksperymencie za należący do zbioru A .
- **Kosztu.** W tym przypadku $\mu_A(x)$ odpowiada kosztowi (cenie) jaką musimy ponieść (zapłacić) za uznanie, że element x należy do zbioru A . Przy tym podejściu 0 odpowiada pełnej przynależności do zbioru, a $+\infty$ brakowi przynależności.